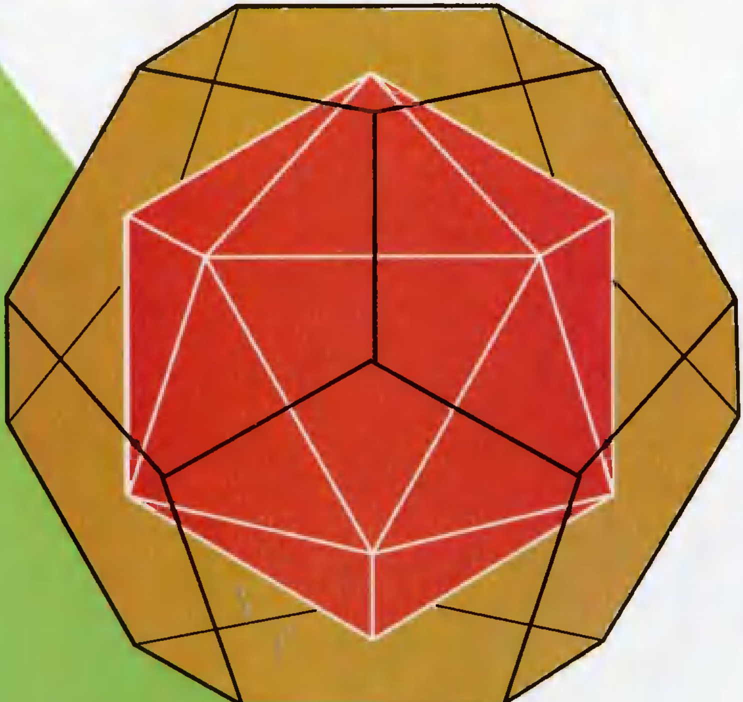
А.Д.АЛЕКСАНДРОВ А.Л.ВЕРНЕР В.И.РЫЖИК



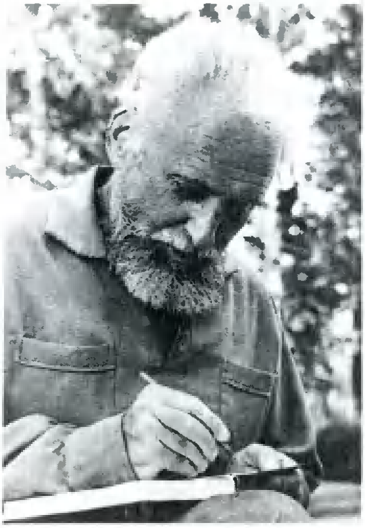
11

ГЕОМЕТРИЯ

·Просвещение·

МНОГОГР

ННИКИ



Александр Данилович Александров (1912—1999)

Академик Александр Данилович Александров — крупнейший геометр XX в. Его личность удивительно многогранна, и сфера его интересов чрезвычайно широка: математик и философ, спортсмен и общественный деятель, организатор науки и публицист.

Благодаря его работам 30—40-х гг. по теории выпуклых многогранников эта теория обрела стройность и завершенность в решении основных проблем. Александр Данилович всегда стремился решить каждый вопрос в наибольшей общности. Поэтому от изучения выпуклых многогранников он перешел к исследованию общих выпуклых тел и их поверхностей. В 40-е гг. он создал и разработал вместе со своими учениками теорию многообразий ограниченной кривизны, которая и сейчас остается одной из наиболее развивающихся областей современной геометрии.

Математические интересы Александра Даниловича были необычайно широки: среди его работ есть и работы по теории меры, и несколько циклов работ по теории дифференциальных уравнений в частных производных, и работы по математическим проблемам теории относительности.

Сын школьных учителей, Александр Данилович сам был всю свою жизнь Учителем. Вокруг него всегда собиралась талантливейшая молодежь. Сотни геометров в России и за ее пределами гордятся своей принадлежностью к александровской геометрической школе, которую во всем мире зовут «русская геометрия».

В общении с молодежью Александр Данилович был открыт, дружелюбен, всегда готов к спору и серьезному обсуждению проблем, волнующих молодежь. Его речь была яркой, волнующей, точной. Популярность Данилыча среди студентов и его учеников была необычайной. В студенческом фольклоре сохранилось немало доброжелательных историй и песен о Данилыче.

Свою увлеченность наукой Александр Данилович стремился передать молодежи в многочисленных публикациях в газетах и журналах. Даже заглавия этих статей говорят о многом: «Вашу руку, коллега!», «Пусть будет больше одержимых!», «Дорогу — увлеченным!», «Поэзия науки», «Ищите истину» и многие-многие другие. И не только о науке писал Александр Данилович в газетах: его статья «Истинный гуманизм и гуманность истины» опубликована в «Литературной газете», а статья «Покори свою вершину!» — в газете «Советский спорт» (Александр Данилович был мастером спорта по альпинизму, и ему покорилась не одна вершина не только в науке).

12 лет (с 1952 по 1964 г.) А. Д. Александров был ректором Ленинградского государственного университета. Будучи ректором, он прежде всего заботился о научном творчестве — о научных семинарах, объединяющих зрелых ученых и молодежь, о кафедрах, поддерживал новые идеи, защищал от нападок научные школы.

Свою работу над школьными учебниками Александр Данилович начал с программной статьи «О геометрии», опубликованной в журнале «Математика в школе» в 1980 г. В этой статье он сформулировал основные принципы, которым должен удовлетворять курс геометрии в средней школе и школьный учебник геометрии.

Предложенное А. Д. Александровым построение элементарной геометрии, с одной стороны, сохранило ее евклидовский дух, а с другой — сделало ее проще и короче, более современной.

А.Д.АЛЕКСАНДРОВ
А.Л.ВЕРНЕР В.И.РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ

учебник для 11 класса с углубленным изучением математики

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 2000

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
А46

Условные обозначения:

■ — окончание доказательства утверждения
* — дополнительный материал
▲▼ — ознакомительный материал

Александров А. Д. и др.
А46 Геометрия: Учеб. для учащихся 11 кл. с углубл. изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик.— М.: Просвещение, 2000.— 319 с.: ил.— ISBN 5-09-009475-6.

«Геометрия, 11» — продолжение учебника «Геометрия, 10» — переработанный вариант выходившего в 1988—1995 гг. учебника Александрова А. Д., Вернера А. Л., Рыжика В. И. «Геометрия, 10—11» для углубленного изучения математики.

Последовательность и большей частью содержание глав сохранены. Изменения коснулись в основном задачного материала: смысловой единицей в этом варианте полагается весь параграф, а не его пункт, что и определило структуру задач в этом издании. (Для лучшей ориентировки в номере каждой задачи указано в скобках, к какому пункту параграфа она отнесена.) Все задачи распределены по рубрикам: «Дополняем теорию», «Доказываем», «Исследуем», «Рассуждаем», «Планируем», «Разбираемся в решении», «Участвуем в олимпиадах» и др. В них оптимально отражены все три составляющие геометрии: логика, наглядное воображение и практика.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 5-09-009475-6

Оглавление

Предисловие 8

Глава V
МНОГОГРАННИКИ 9

§ 21. Многогранник и его элементы . . . . —
21.1. Определение многогранника . . . . —
21.2. Обобщение понятия многоугольника. Элементы многогранника 10
21.3. Два подхода к определению многогранника 11
21.4. Об определениях 14
21.5. Многогранная поверхность и развертка 16
Задачи 18

§ 22. Призмы 20
22.1. Общие свойства призм . . . . —
22.2. Параллелепипед 21
22.3. Симметрия параллелепипеда 22
22.4. Симметрия правильных призм. Поворотная симметрия 23
Задачи 24

§ 23. Пирамиды 28
23.1. Пирамида — частный случай конуса . . . . —
23.2. Правильная пирамида 30
23.3. Симметрия правильной пирамиды 31
Задачи . . . . —

§ 24*. Выпуклые многогранники 36
24.1. Характерные свойства выпуклых многогранников . . . . —
24.2. Грани и сечения выпуклого многогранника 37
Дополнение к параграфу 24*. 38
Выпуклые многогранники и выпуклые оболочки . . . . —
Задачи 42

§ 25. Теорема Эйлера 44
Дополнение к параграфу 25 48
Развертка выпуклого многогранника . . . . —
Задачи 52

§ 26. Правильные и полуправильные многогранники . . . 53
26.1. Правильные фигуры . . . —
26.2. Правильные многогранники . . . —
26.3. Построение правильных многогранников. Двойственность правильных многогранников . . . 57
26.4. Симметрия правильных многогранников . . . 58
26.5. Многогранные углы. Правильные многогранные углы . . . 61
26.6. Полуправильные многогранники и правильные звездчатые многогранники . . . 63
Задачи . . . 66
Задачи к главе V. . . . 69

Глава VI
ОБЪЕМЫ . . . 74

§ 27. Определение площади и объема . . . —
27.1. Простые фигуры . . . —
27.2. Определение площади и объема . . . 75
27.3. Существование площади и объема . . . 77
§ 28. Объем прямого цилиндра . . . 78
28.1. Теорема об объеме прямого цилиндра . . . —
28.2*. Доказательство теоремы об объеме прямого цилиндра . . . 79
Задачи . . . 81
§ 29. Представление объема интегралом . . . 83
Задачи . . . 85
§ 30. Объемы некоторых тел . . . 87
30.1. Объем цилиндра . . . —
30.2. Объем конуса . . . 88
30.3. Объем шара . . . —
30.4. Объемы некоторых тел вращения . . . 89
Дополнение к главе VI . . . 90
Равновеликость и равносоставленность . . . —
Задачи . . . 93
Задачи к главе VI . . . 100

Глава VII
ПОВЕРХНОСТИ . . . 103

§ 31. Геометрия на поверхности . . . —
31.1. О понятии поверхности . . . —
31.2. Двусторонние и односторонние поверхности . . . 104
31.3*. Внутренняя геометрия поверхности . . . 106
§ 32. Площадь поверхности . . . 109
32.1. О понятии площади поверхности . . . —
32.2. Описанные многогранники и определение площади выпуклой поверхности . . . —
32.3. Площадь сферы . . . 111
32.4. Площадь части сферы . . . —
32.5. Площадь поверхности конуса и цилиндра . . . 113

Дополнение к параграфу 32 114
Еще об определении площади поверхности . . . . . —
Задачи 115
§ 33*. Сферическая геометрия 123
33.1. Внутренняя геометрия сферы . . . . . —
33.2. Сферические многоугольники и их площадь 124
33.3. Сферические многоугольники и многогранные углы 127
33.4. Задачи картографии 129
Дополнение к параграфу 33 133
I. «Неравенство треугольника» на сфере и его следствия . . . . . —
II. Минимальность длин дуг больших окружностей 134
Задачи 135
Задачи к главе VII 136

Глава VIII
ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ 139
§ 34. Векторы . . . . . —
34.1. Понятие вектора . . . . . —
34.2. Сонаправленность и равенство векторов . . . . . —
34.3. Сложение векторов 141
34.4. Умножение вектора на число 143
34.5. Скалярное умножение векторов . . . . . —
Задачи 145
§ 35. Разложение вектора на составляющие 148
35.1. Составляющие вектора . . . . . —
35.2. Теорема о составляющих вектора 150
35.3. Разложение векторов по базису 152
35.4. Радиус-вектор 154
35.5. Векторный метод 156
Дополнение к параграфу 35 160
Центры масс и выпуклые оболочки . . . . . —
Задачи 162
§ 36*. Векторное умножение векторов 168
36.1. Определение векторного произведения векторов . . . . . —
36.2. Свойства векторного умножения 170
36.3. Доказательство дистрибутивности векторного умножения 172
36.4. Вычислительная формула для векторного умножения 173
Задачи 174
§ 37. Координаты 176
37.1. Прямоугольные координаты . . . . . —
37.2. Формула расстояния между точками 179
37.3. Замечание о применении координат . . . . . —
37.4. Координаты и векторы 180
37.5. Задание фигур уравнениями и неравенствами 182
37.6. Уравнение плоскости 185
37.7. Метод координат 187
37.8*. Другие системы координат 188
37.9. Координатная сеть 190

Дополнение к параграфу 37 192
I. Параметрические уравнения прямой и плоскости . . . . . . —
II. Уравнения прямой и плоскости в аффинных координатах . . . 193
Задачи . . . . —
Задачи к главе VIII 198

Глава IX

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 202

§ 38. Движения и их общие свойства . . . . —
38.1. Отображения . . . . —
38.2. Движения и равенство фигур 204
38.3. Механическое и геометрическое движение 206
38.4. Общие свойства движений 207
38.5*. О распространении движения на пространство 209
Задачи 210
§ 39. Частные виды движений пространства 212
39.1. Параллельный перенос . . . . —
39.2. Центральная симметрия 214
39.3. Отражение в плоскости (зеркальная симметрия) 216
39.4. Поворот вокруг прямой 218
39.5. Осевая симметрия в пространстве 221
Задачи . . . . —
§ 40. Теоремы о задании движений пространства 230
40.1. Неподвижные точки движений пространства . . . . —
40.2. Основные теоремы о задании движений пространства . . . 231
40.3. Два рода движений 233
Задачи 235
§ 41*. Классификация движений 236
41.1. Композиции отражений в плоскости . . . . —
41.2. Движения первого рода как винтовые движения 238
41.3. Движения второго рода, имеющие неподвижную точку, как зеркальный поворот 241
41.4. Движения второго рода, не имеющие неподвижных точек, как скользящие отражения 244
Дополнение к параграфу 41 245
Винтовая линия . . . . —
Задачи 247
§ 42. Симметрия 249
42.1. Общее понятие симметрии . . . . —
42.2. Группа симметрии 250
42.3. Элементы групп симметрии ограниченных и неограниченных фигур 251
Задачи 252
§ 43*. Аффинные преобразования 254
43.1. Определение и примеры аффинных преобразований . . . . —
43.2. Свойства аффинных преобразований 256
43.3. Неподвижные точки аффинных преобразований 259
43.4. Теоремы о задании аффинных преобразований 260

43.5. Метод аффинных преобразований 261
43.6. Классификация аффинных преобразований 262
43.7. Изменение площадей и объемов при аффинных преобразованиях 263
§ 44*. Проективные преобразования 264
44.1. Предварительные замечания . . . . —
44.2. Проективные свойства прямой. Сложное отношение четырех точек 265
44.3. Проективные преобразования прямой 268
44.4. Проективная плоскость. Принцип двойственности 269
44.5. Модель проективной плоскости 272
44.6. Проективные преобразования плоскости 273
44.7. Классификация проективных преобразований плоскости 275
§ 45*. Теоретико-групповой подход к геометрии 276
45.1. Группа преобразований множества . . . . —
45.2. Геометрия группы преобразований 277
45.3. «Эрлангенская программа» Ф. Клейна 279
45.4. Модель Кэли—Клейна плоскости Лобачевского . . . . —
Задачи к главе IX 281

Глава X
СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ 283

§ 46*. Современная геометрия . . . . —
46.1. Коренное отличие современной геометрии . . . . —
46.2. Возможная геометрия реального пространства 285
46.3. Многомерное пространство 286
46.4. Топология 287
46.5. Другие геометрии 288
46.6. Основания геометрии 289
46.7. Векторные пространства 292
46.8. Геометрия и действительность 295
§ 47*. Теория относительности и геометрия 298
47.1. Возникновение теории относительности . . . . —
47.2. Постулаты теории относительности 299
47.3. Преобразования Лоренца 300
47.4. Относительность времени 303
47.5. Геометрия мира 304
47.6. Интервал 305
47.7. Псевдоевклидовы пространства 307
47.8. Дополнения 308
47.9. Понятие об общей теории относительности 310

Поступаем в вуз 311

Предметный указатель 318

Предисловие

Этим учебником завершается четырехлетний углубленный курс изучения геометрии. В первых трех его главах решены основные задачи классической элементарной стереометрии: дана классификация правильных многогранников, выведены формулы для вычисления объемов важнейших тел и площадей их поверхностей. Но уже и в этих главах учебника, а особенно в трех заключительных, мы знакомим выпускников с идеями и методами современной геометрии: с координатным и векторным методами, с элементами теории поверхностей и топологии, с основными видами преобразований и с началами специальной теории относительности.

Теоретический материал учебника дифференцирован как по глубине рассматриваемого материала, так и по возможности изучать различные дополнительные темы.

Задачи в этом учебнике дифференцированы иначе, чем в предыдущих изданиях. В конце книги предложены задачи для поступающих в вузы, которые в различные годы предлагались на вступительных экзаменах.

Глава V

Многогранники

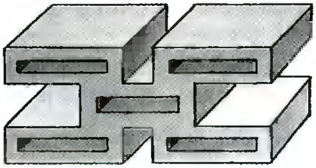


Рис. 1

Рассказывать о наиболее важных видах многогранников — пирамидах и призмах, а также решать задачи о них мы начали с первых уроков еще в 10 классе. Теперь, изучив основы стереометрии, мы более подробно ознакомимся с теорией многогранников. Построение этой теории, начавшееся еще в глубокой древности, не завершено до сих пор, и, изучая многогранники, мы познакомимся с красивыми и глубокими результатами о них, полученными уже в XX в. Полнее всего изучен класс выпуклых многогранников. Ему и посвящена бóльшая часть этой главы.

§ 21. Многогранник и его элементы

21.1. Определение многогранника

Многогранником называется ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников.

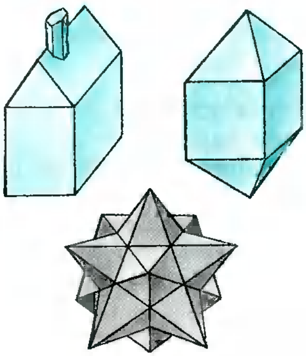


Рис. 2

Обратите внимание, что многогранник — ограниченное тело. Поэтому, например, куб — многогранник, а тело, которое состоит из всех точек пространства, за исключением внутренних точек некоторого куба, многогранником не считается, хотя его поверхность и состоит из многоугольников.

Многогранники могут иметь разнообразное и очень сложное строение (рис. 1 и 2). Различные постройки, например строящиеся дома из кирпичей и бетонных блоков, представляют собой реальные примеры многогранников. Другие примеры можно найти среди мебели, например стол. Но из всех многогранников мы рассмотрим лишь наиболее простые.

21.2. Обобщение понятия многоугольника. Элементы многогранника

Грань многогранника — это некоторый многоугольник. Но достаточно простые примеры (например, многогранник, изображенный на рисунке 3 и построенный из двух приложенных друг к другу различных кубов) показывают, что многогранники могут иметь кольцеобразные и даже более сложно устроенные грани.

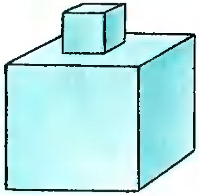
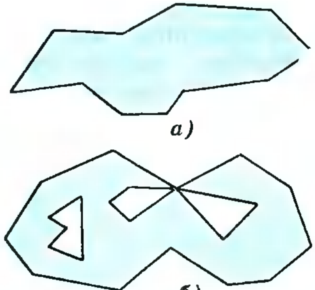


Рис. 3

Их граница может состоять не только из одной простой замкнутой ломаной (как на рис. 4, *а*), а из двух или нескольких таких ломаных (рис. 4, *б*). Поэтому дадим более общее определение.

Многоугольником называется ограниченная замкнутая область, граница которой состоит из конечного числа отрезков.

Это определение выделяет многоугольники из замкнутых областей подобно тому, как многогранники выделяются среди тел.



а)

б)

Рис. 4

Согласно этому определению граница многоугольника вовсе не обязана быть простой замкнутой ломаной: в одной ее вершине может сходиться четное число сторон (рис. 4, *б*, почему обязательно четное?). Точно так же многоугольник может быть ограничен несколькими замкнутыми ломаными. Чтобы отличить от таких общих многоугольников многоугольник, ограниченный простой замкнутой ломаной, будем называть его **простым.**

Замечание. В определении многогранника, данном в предыдущем пункте, имелись в виду простые многоугольники. Теперь же термин «многоугольник» в определении многогранника можно понимать в обобщенном смысле.

Обобщив понятие многоугольника, мы теперь можем определить, что такое грань многогранника.

Многоугольник на поверхности многогранника называется его **гранью**, если, во-первых, внутренность многогранника прилегает лишь с одной стороны к этому многоугольнику и, во-вторых, он не содержится ни в каком другом многоугольнике, лежащем на поверхности многогранника (иначе он является лишь частью грани).

Многоугольники, не удовлетворяющие первому условию, могут лежать на поверхности многогранника (рис. 5).

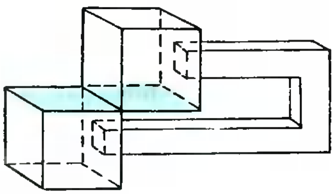


Рис. 5

Стороны граней называются **ребрами многогранника**, а вершины граней — **вершинами многогранника.**

К элементам многогранника, кроме его вершин, ребер и граней, относятся также плоские углы его граней и двугранные углы при его ребрах. **Двугранный угол при ребре многогранника** определяется его гранями, подходящими к этому ребру (рис. 6).

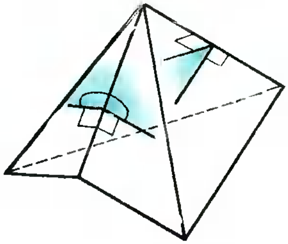


Рис. 6

Замечание. Подобно тому как, говоря об углах многоугольника, всегда имеют в виду его внутренние углы, а они могут быть и больше 180° (т. е. невыпуклыми), так и, говоря о величинах двугранных углов при ребрах многогранника, имеют в виду, что они измерены изнутри многогранника и могут быть больше 180°. В этом случае удобно понимать двугранный угол как часть пространства, а не как пару полуплоскостей.

21.3. Два подхода к определению многогранника

В этом пункте мы сначала обсудим возможность двух подходов к понятию многоугольника.

Напомним, что многоугольником в п. 21.2 мы назвали ограниченную замкнутую область, граница которой состоит из конечного числа отрезков. Простейшим многоугольником является треугольник. Оказывается, что любой многоугольник можно так разбить на треугольники, что это разбиение удовлетворяет следующим условиям: каждые два треугольника этого разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину, либо имеют общую целую сторону (рис. 7). Такое разбиение называется **триангуляцией многоугольника.**

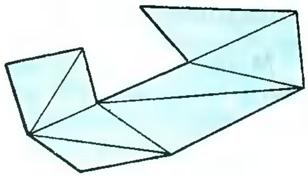


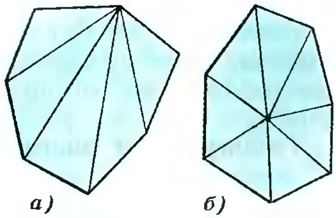
Рис. 7

Для выпуклых многоугольников легко указать два способа триангуляции — диагоналями, идущими из любой вершины многоугольника (рис. 8, *а*), и отрезками, соединяющими любую внутреннюю точку многоугольника с его вершинами (рис. 8, *б*).

Для невыпуклых многоугольников доказать возможность их триангуляции сложнее. Укажем на одну из возможностей триангуляции.

Теорема 21.1

Каждый многоугольник триангулируем.



а) *б)*

Рис. 8

Доказательство. Если многоугольник не выпуклый, то проведем все прямые, на которых лежат стороны данного многоугольника. Они разобьют его на выпуклые многоугольники. Эти многоугольники выпуклы как пересечения полуплоскостей. Разбивая теперь эти выпуклые многоугольники на треугольники, мы получим триангуляцию исходного многоугольника (рис. 9).

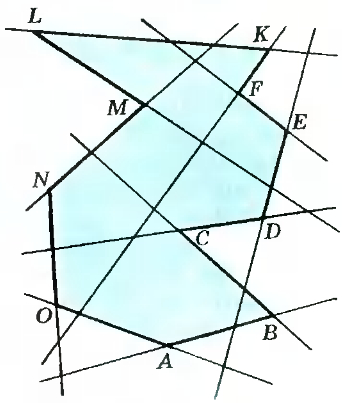


Рис. 9

Конечно, такая триангуляция не самая экономная, в ней число треугольников не наименьшее для данного многоугольника. Число треугольников в триангуляции будет минимальным, если ее осуществить с помощью диагоналей многоугольника. Доказать возможность такой триангуляции для невыпуклого многоугольника не очень просто. Но для каждого конкретного многоугольника любой из вас легко укажет, как ее можно осуществить, например, для многоугольников, изображенных на рисунке 10.

Укажем одно важное свойство триангуляции многоугольника. Поскольку любые две внутренние точки многоугольника можно соединить ломаной, лежащей внутри многоугольника, то от каждого треугольника можно перейти по цепочке треугольников (в которой каждый последующий прилегает к предыдущему по целой стороне) к любому другому треугольнику.

Исходя из свойств триангуляции, можно дать другое, равносильное первому определение многоугольника.

Многоугольник — это фигура на плоскости, являющаяся объединением конечного числа треугольников, для которых выполнены следующие условия:

1) каждые два треугольника либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину, либо имеют только общую сторону;

2) от каждого треугольника к другому можно перейти по цепочке треугольников, в которой каждый последующий прилегает к предыдущему по целой стороне.

То, что фигура, удовлетворяющая этим двум условиям, является многоугольником в смысле первоначального определения, вы легко сможете проверить самостоятельно.

Сказанное выше можно с небольшими изменениями перенести с многоугольников на многогранники, заменяя треугольники на простейшие многогранники — тетраэдры.

Триангуляцией многогранника называется такое его разбиение на тетраэдры, при котором каждые два тетраэдра либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину, либо общее ребро, либо целую общую грань.

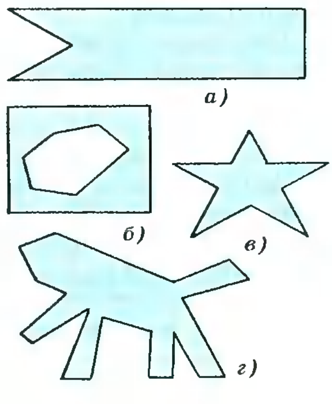


Рис. 10

Легко триангулировать выпуклую пирамиду, триангулируя диагоналями ее основание и проводя затем диагональные сечения (рис. 11). Любой выпуклый многогранник можно сначала разбить на выпуклые пирамиды, общей вершиной которых является некоторая (любая) внутренняя точка многогранника, а основаниями — грани многогранника (рис. 12, чтобы не загромождать чертеж, на нем показаны только видимые грани многогранника).

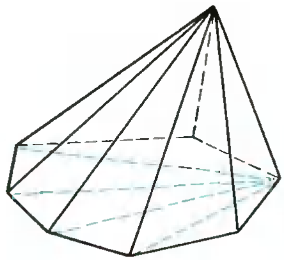


Рис. 11

Затем, триангулируя диагональными сечениями полученные выпуклые пирамиды, мы триангулируем выпуклый многогранник.

Наконец, любой невыпуклый многогранник сначала можно разбить на выпуклые многогранники, проведя плоскости всех граней многогранника. Затем, триангулируя указанным выше способом полученные выпуклые многогранники, мы построим триангуляцию исходного многогранника. Итак, доказана

Теорема 21.2

Любой многогранник триангулируем.

(И снова триангуляция, построенная при доказательстве теоремы 21.2, не минимальная по числу тетраэдров. Укажите, например, для призмы триангуляцию, в которой вершинами тетраэдров будут только вершины призмы.)

Если теперь цепочку треугольников, о которой шла речь в определении многоугольника, заменить цепочкой тетраэдров, прилегающих друг к другу по целым граням, то придем к следующему новому определению многогранника, равносильному первому определению многогранника.

Многогранник — это фигура, являющаяся объединением конечного числа тетраэдров, для которых выполнены следующие условия:

1) каждые два тетраэдра либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо только общее ребро, либо целую общую грань;

2) от каждого тетраэдра к другому можно перейти по цепочке тетраэдров, в которой каждый последующий прилегает к предыдущему по целой грани.

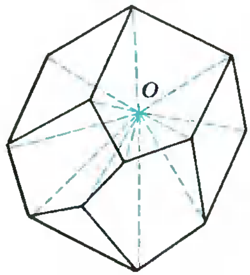


Рис. 12

Как и для многоугольника, доказательство того, что фигура, удовлетворяющая этим двум условиям, является многогранником в смысле первого определения, вы сможете провести самостоятельно.

Далее при изложении теоретического материала и при решении задач можно пользоваться и тем и другим подходом к определению многоугольника и многогранника, выбирая то, которое удобнее в данном конкретном случае.

21.4. Об определениях

Данное в п. 21.1 определение многогранника состоит в описании его характерных (или характеристических) свойств. Оно позволяет узнать, является ли данная фигура многогранником или нет.

Такие определения, состоящие в описании или указании характерных свойств предмета, и называются описательными (иначе дескриптивными, что и значит по-русски «описательные»). Однако такое определение не указывает способа построения предмета, не говорит о том, как его сделать. Более того, в таком определении не заключается даже никаких указаний на существование предмета, удовлетворяющего данному определению. Могло бы быть, что такого предмета нет вовсе.

Например, дадим следующие определения: многогранник, все грани которого треугольники, назовем треугольным, а многогранник с пятью гранями — пентаэдром (что и значит по-русски «пятигранник»). «Рассмотрим треугольный пентаэдр...» Однако такого многогранника не существует! Вы в этом легко убедитесь, попытавшись сложить все пять треугольников так, чтобы они ограничивали многогранник. (Вообще треугольногранный многогранник может иметь только четное число граней, треугольногранных многогранников с нечетным числом граней не существует!)

Это замечание показывает, что описательное определение по меньшей мере должно быть дополнено доказательством существования определяемого предмета, лучше всего указанием способа его построения. Но еще лучше, если описательное определение дополняется конструктивным, т. е. таким, в котором дается способ построения (конструирования) определяемого предмета.

Именно так мы определили пирамиды и призмы. Сначала еще во введении были даны их описательные определения: *пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — какой-нибудь многоугольник, а остальные — треугольники с общей вершиной; призмой называется многогранник...* и т. д.

Затем построение пирамид и призм было выполнено в п. 5.4. Теперь, когда мы знаем конструктивные определения конуса (см. § 19) и цилиндра (см. § 18), понятно, что в п. 5.4 мы строили пирамиду как конус, основание которого — многоугольник, а призму строили как цилиндр, основание которого — многоугольник. Поэтому *пирамиду можно конструктивно определить как конус, основание которого — многоугольник, а призму определить как цилиндр, основание которого — многоугольник.* Эти определения указывают, как строится любая пирамида и любая призма.

Например, для построения пирамиды берем в некоторой плоскости многоугольник Q и точку P вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки многоугольника Q с точкой P, заполняют пирамиду. Конечно, нельзя провести все эти отрезки фактически, поэтому можно было бы возразить, что здесь не дается построение пирамиды. Но это не так. Соединяя точку P с вершинами многоугольника Q, мы получаем боковые ребра пирамиды и вместе с ними ясное наглядное представление о ней. По ребрам грани уже «видны».

Аналогичное верно и для призмы. Проводя из вершин заданного ее основания Q равные и параллельные отрезки, мы получаем боковые ребра, а концы их дают вершины другого основания, так что получается ясное представление о заданной призме.

Но наряду с этими соображениями наглядности есть принципиальное положение о задании и построении множества точек вообще, будь то пирамиды, призмы или какие угодно другие многогранники. Множество задается указанием условия, которому удовлетворяют все его точки и не удовлетворяют никакие другие точки. Если это условие формулировать как возможность построения, то и говорят о построении множества. Приведите уже известные вам примеры.

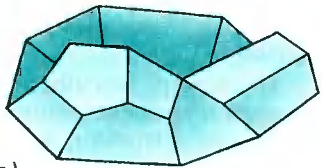
«Построить» множество точек — значит указать способ построения каждой его точки.

Способ построения любой точки пирамиды по данному основанию Q и вершине P дан, а значит, указано построение пирамиды.

Для многогранника тоже даны два определения. Первоначальное определение в п. 21.1 было описательным: оно указывает, какими свойствами должна обладать фигура, называемая многогранником. Второе определение, данное в предыдущем пункте, конструктивное: оно указывает, как можно строить любой многогранник из тетраэдров, а как строится тетраэдр, известно. Тетраэдры играют роль как бы простейших кирпичей, из которых можно складывать любые многогранники.

21.5. Многогранная поверхность и развертка

Наряду с многогранниками рассматривают также **многогранные поверхности** — фигуры, составленные из многоугольников, которые прикладываются друг к другу сторонами (рис. 13, *а*). Это можно сравнить с тем, как ломаная составляется из отрезков: одни отрезки прикладываются к другим концами (рис. 13, *б*). Но у отрезка только два конца, а сторон у многоугольников много. Поэтому когда многоугольник приложен к другому стороной, то остается не одна свободная сторона и возможностей приложить новые многоугольники много.



а)

б)

Рис. 13

К той стороне, где уже приложен многоугольник, прикладывать другие не разрешается, так что многоугольники встречаются по сторонам только попарно. Но могут оставаться и свободные стороны (например, у поверхности куба с вынутой гранью, как коробка без крышки, рис. 14). Если свободных сторон не остается, поверхность называется замкнутой (подразумевается, что многоугольников конечное число).

Можно допускать, что многоугольники могут пересекаться, как могут пересекаться отрезки ломаной. Если этого не допускать, то замкнутая многогранная поверхность ограничивает многогранник. Но у произвольного многогранника граница может состоять из нескольких замкнутых многогранных поверхностей. Такой многогранник получается, когда из внутренности одного многогранника удалены внутренности одного или нескольких многогранников, так что получаются многогранники с полостями внутри.

Нередко многогранные поверхности называют многогранниками (например, в Большой советской энциклопедии многогранники определяются как замкнутые многогранные поверхности). Это делают и в быту, когда склеивают из бумаги или картона кубики, коробки или другие многогранники. Понятно, из бумаги или картона склеивается не куб — тело, а куб — многогранная поверхность. «Многогранники» — многогранные поверхности — склеивают из разверток.

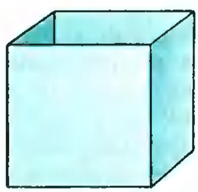


Рис. 14

Вообще **разверткой** «многогранника» — многогранной поверхности — называется совокупность многоугольников, для которой указано, как их нужно склеивать — прикладывать друг к другу по сторонам. Конечно, склеиваемые стороны должны быть равны и нужно указывать, какой конец одной стороны должен совпадать с каким концом другой стороны.

При составлении — склеивании многогранной поверхности многоугольники развертки могут «переламываться».

Не исключается, что многоугольник склеивается сам с собой, как в известной крестообразной развертке куба (рис. 15, здесь же приведены и другие примеры).

Для того чтобы из данной развертки можно было бы склеить многогранник, она должна удовлетворять дополнительным условиям. В § 25 рассматриваются условия, которые обеспечивают возможность склеить из развертки замкнутый выпуклый многогранник. (Вообще, сказанное о развертках — это наглядное описание, хотя его можно превратить в точное математическое определение.) Заметим, что изучение разверток составляет важный вопрос геометрии не только в теории многогранников, но и в той области геометрии, которая называется топологией.

Реальное изготовление многогранников по их разверткам — дело интересное и не всегда простое. Австралийский учитель математики М. Веннинджер посвятил ему целую книгу под названием «Модели многогранников» (М.: Мир, 1974). В ней приведены способы изготовления наиболее симметричных многогранников, порой весьма причудливых. Попробуйте склеить из разверток правильные многогранники (они изображены в § 26), а также следующие красивые многогранники:

1. **Кубооктаэдр.** Он получится, если у куба «срезать» все его восемь вершин (рис. 16).

2. **Ромбокубооктаэдр.** Он получится, если на правильную восьмиугольную призму с квадратными боковыми гранями поставить две «крышки», склеенные из пяти квадратов и четырех правильных треугольников (рис. 17).

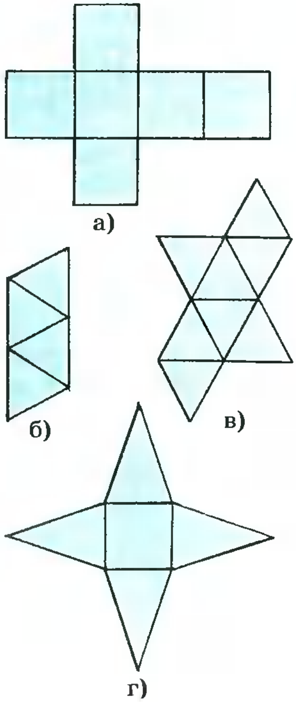


Рис. 15

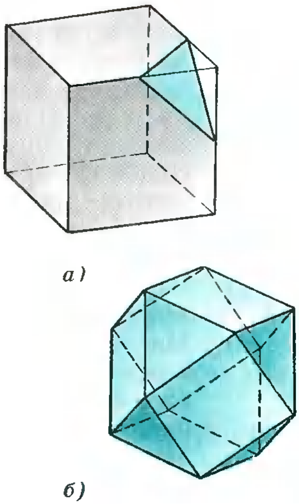


Рис. 16

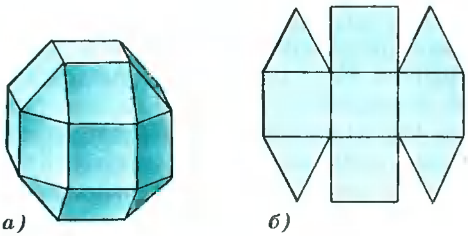


Рис. 17

Кубооктаэдр и ромбокубооктаэдр — два из тринадцати архимедовых полуправильных многогранников.

3. **Звездчатый октаэдр Кеплера.** Его можно получить как объединение двух правильных тетраэдров (рис. 18).

4. **Большой додекаэдр** (рис. 19). Его поверхность состоит из двадцати боковых поверхностей правильных треугольных пирамид с боковыми гранями, имеющими углы 36°, 36° и 108°.

Моделированию многогранников посвящена и одна из глав интересной книги И. М. Смирновой «В мире многогранников» (М.: Просвещение, 1995), предназначенной для школьников.

В задачах, говоря о развертках многогранников, мы всегда имеем в виду развертки, составленные из их целых граней, а не из частей граней. Например, развертку куба считаем составленной из шести квадратов, а не из двенадцати треугольников.

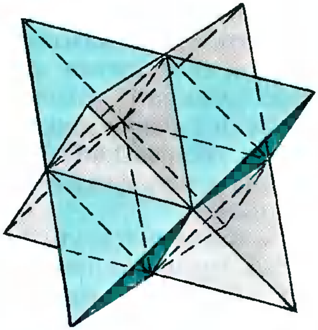


Рис. 18

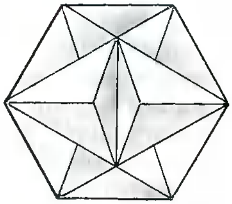


Рис. 19

Задачи

Рисуем

21.1.(2). Нарисуйте многогранник, у которого сечениями могут быть: а) квадрат, прямоугольник, правильный шестиугольник; б) равносторонний треугольник, квадрат, трапеция; в) ромб, равнобедренный треугольник, прямоугольник; г) объединение двух треугольников без общих точек.

21.2.(2). Вращаясь вокруг одного из ребер многогранника, плоскость дает такие сечения: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм; г) равнобедренную трапецию. Нарисуйте такой многогранник.

21.3.(2). Нарисуйте многогранник: а) все грани которого — треугольники, но не тетраэдр; б) все грани которого — квадраты, но не куб; в) все грани которого — неравные четырехугольники; г) все грани которого — пятиугольники; д) четыре грани которого — правильные треугольники, а еще четыре — правильные шестиугольники.

21.4.(2). Нарисуйте разные многогранники, которые могут получиться в пересечении пяти полупространств; шести полупространств.

21.5.(2). Нарисуйте многогранники, заданные проекциями на три попарно перпендикулярные плоскости (рис. 20).

21.6.(2). Многогранник M_1 называется вписанным в многогранник M_2, если каждая вершина M_1 лежит на поверхности M_2. Нарисуйте тетраэдр $PABC$ и вписанный в него многогранник M_1, такой, что: а) на каждом ребре тетраэдра лежит ровно одна вершина M_1; б) на каждой грани тетраэдра лежит ровно одна вершина M_1; в) на каждой грани тетрадра лежат ровно две вершины M_1. Решите аналогичные задачи для куба. Кроме того, нарисуйте разные многогранники, вписанные в куб, вершины которых находятся в вершинах куба.

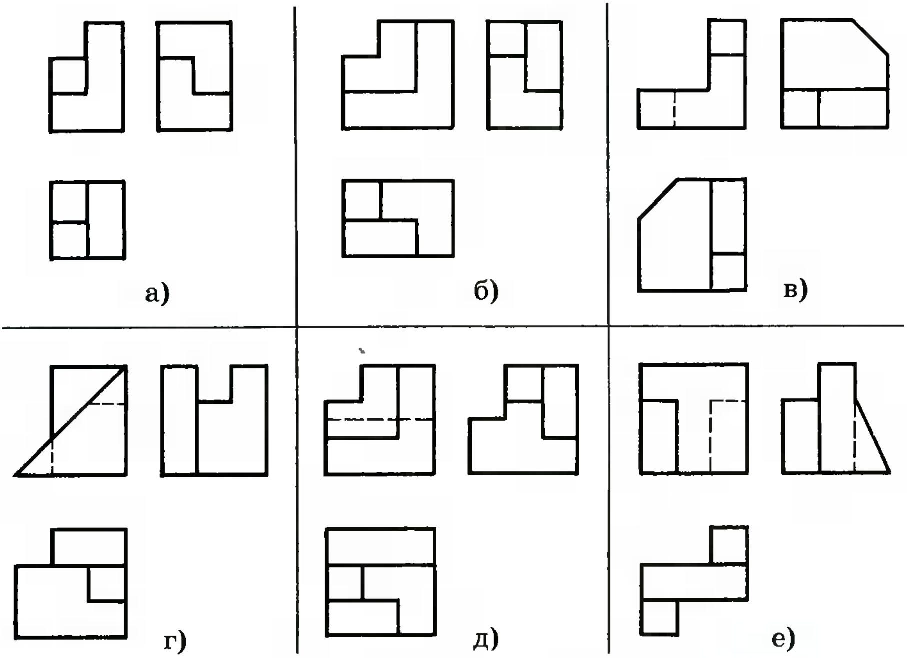


Рис. 20

21.7.(5). Нарисуйте разные развертки правильного тетраэдра. При получении многогранника из развертки некоторые стороны развертки склеиваются, в результате чего получается шов. Из некоторых соображений целесообразно общую длину швов уменьшить. Выберите из нарисованных разверток ту, у которой общая длина швов наименьшая. Решите аналогичную задачу для куба.

21.8.(5). Нарисуйте многогранник, развертка которого имеет такой вид, как на рисунке 21.

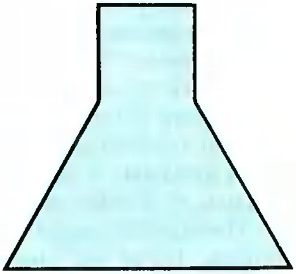


Рис. 21

Представляем

21.9.(2). Приведите пример многогранника, около которого: а) можно описать сферу; б) нельзя описать сферу.

21.10.(2). Приведите пример многогранника, в который: а) можно вписать сферу; б) нельзя вписать сферу.

21.11.(2). Является ли многоугольником пересечение двух любых многоугольников? Ответьте на аналогичный вопрос для многогранников.

21.12.(2). Многоугольник разделили прямой на две части. Будут ли полученные части многоугольниками? Ответьте на аналогичный вопрос для многогранников.

Доказываем

21.13.(2). Докажите, что каждая грань вписанного многогранника является многоугольником, вписанным в некоторую окружность. Верно ли обратное утверждение?

21.14.(2). Докажите, что существуют многогранники с любым числом ребер, большим 7. Обсудите остальные случаи.

Исследуем

21.15.(2). Нарисуйте многогранник, у которого есть грани с нечетным числом сторон. Подсчитайте их число. Проделайте это, пока у вас не появится некоторое предположение. Докажите его.

21.16.(2). Нарисуйте многогранник, у которого из некоторых вершин выходит нечетное число ребер. Далее проделайте работу, аналогичную той, что указана в задаче 21.15.

§ 22. Призмы

22.1. Общие свойства призм

С призмами мы уже хорошо знакомы. В этом пункте мы вспомним, что нам известно о призмах.

Напомним, что призму можно определить как многогранник, у которого две грани, называемые **основаниями призмы,** равны и их соответственные стороны параллельны, а остальные грани — параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований.

Эти остальные грани называются **боковыми гранями призмы,** а их стороны, не лежащие на основаниях призмы,— **боковыми ребрами призмы** (рис. 22).

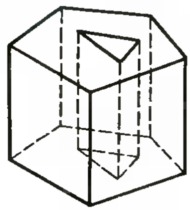
Именно так мы определили призму уже во введении. Теперь, когда мы знакомы с определением цилиндра, нам ясно, что в определении призмы говорится, что *призма — это такой многогранник, который является цилиндром.* Итак, призма — это цилиндр среди многогранников.

Верно и обратное: *если цилиндр — многогранник, то это призма.*

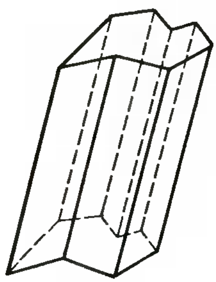
Действительно, в этом случае основания цилиндра являются многоугольниками и, проводя построение цилиндра, мы получаем призму.

Поэтому призме можно дать и такое определение:

Призмой называется цилиндр, основание которого — многоугольник.



а)



б)

Рис. 22

Поскольку призма — цилиндр, то все понятия, относящиеся к цилиндрам, относятся и к призмам. Например, **высота призмы** — это общий перпендикуляр плоскостей, где лежат основания призмы (а также его длина).

Призма называется ***n*-угольной,** если ее основание — простой *n*-угольник (рис. 23). Призма называется **прямой,** если ее боковые ребра перпендикулярны основанию. Это свойство призмы равносильно тому, что все ее боковые грани являются прямоугольниками (рис. 24). Вспомните теоремы, из которых это следует. Непрямые призмы называют **наклонными.**

Правильной призмой называется прямая призма, основание которой — правильный многоугольник (рис. 25).

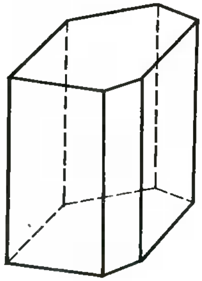


Рис. 23

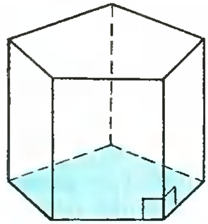


Рис. 24

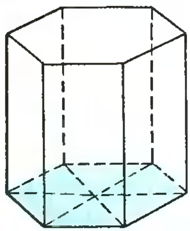


Рис. 25

22.2. Параллелепипед

Призма, у которой основание — параллелограмм, называется **параллелепипедом** (рис. 26).

У параллелепипеда шесть граней и все они параллелограммы. Причем эти параллелограммы попарно равны и параллельно расположены. (В этом вы можете убедиться, воспользовавшись вторым признаком параллельности плоскостей.) Поэтому любую грань параллелепипеда можно принять за его основание.

У параллелепипеда восемь вершин и четыре диагонали, которые соединяют пары противоположных вершин. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам. Докажите это самостоятельно.

Параллелепипед называется **прямоугольным,** если все его грани — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед имеет следующие очевидные свойства:

1) ребра, сходящиеся в каждой его вершине, взаимно перпендикулярны;

2) любые две его грани либо параллельны, либо перпендикулярны;

3) каждое его ребро перпендикулярно тем противоположным граням, на которых лежат концы этого ребра.

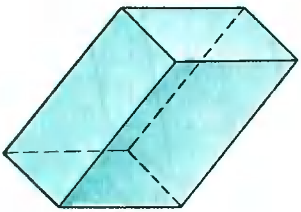


Рис. 26

Из пространственной теоремы Пифагора вытекает, что ***квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, исходящих из одной вершины*** (рис. 27). Часто это и называется теоремой Пифагора в пространстве.

Куб — это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны, т. е. все грани которого — квадраты.

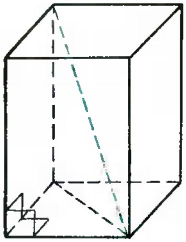


Рис. 27

22.3. Симметрия параллелепипеда

Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам. Поэтому противоположные вершины параллелепипеда симметричны относительно этой точки. Следовательно, каждый параллелепипед имеет центр симметрии — точку пересечения его диагоналей (рис. 28).

В общем случае осей и плоскостей симметрии параллелепипед не имеет. Прямой, но не прямоугольный параллелепипед всегда имеет ось симметрии — прямую, проходящую через центры симметрии его оснований, и плоскость симметрии, проходящую через середины его боковых ребер (рис. 29, *а*). Если основания прямого параллелепипеда — ромбы (но не квадраты), то появляются еще две оси и две плоскости симметрии (рис. 29, *б*).

Найдите сами элементы симметрии прямоугольного параллелепипеда, среди граней которого нет квадратов. Если среди граней прямоугольного параллелепипеда есть квадраты, то он является правильной четырехугольной призмой. Симметрия правильных призм рассмотрена в следующем пункте, а симметрия куба — в § 26.

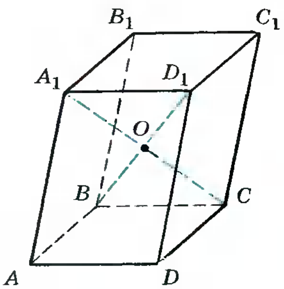
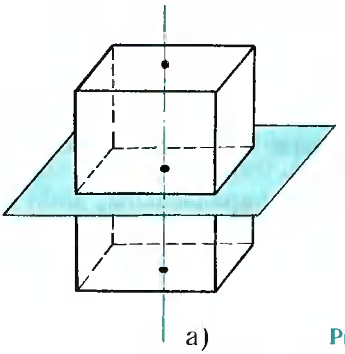
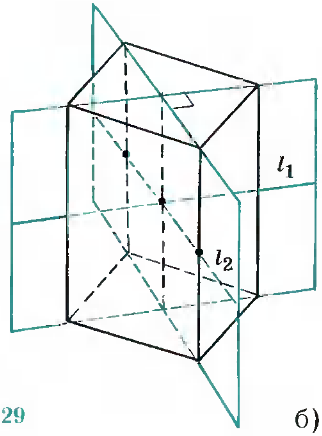


Рис. 28



а)

Рис. 29



б)

22.4. Симметрия правильных призм. Поворотная симметрия

Напомним, что правильной называется прямая призма, в основании которой правильный n-угольник. Симметричность правильных призм определяется симметричностью их оснований (рис. 30), а также перпендикулярностью основаниям боковых ребер и граней.

У правильной n-угольной призмы имеется n плоскостей симметрии, проходящих через соответствующие оси симметрии оснований призмы (рис. 31). Кроме того, у нее имеется еще одна плоскость симметрии, которая проходит через середины боковых ребер (рис. 32).

Осями симметрии правильной n-угольной призмы всегда являются n осей симметрии сечения этой призмы, проходящего через середины боковых ребер (рис. 33). Если к тому же n четно, то осью симметрии является еще прямая, которая соединяет центры оснований (рис. 34). Если же n нечетно, то других осей симметрии нет.

Отрезок, соединяющий центры оснований правильной призмы, называется ее осью (рис. 35).

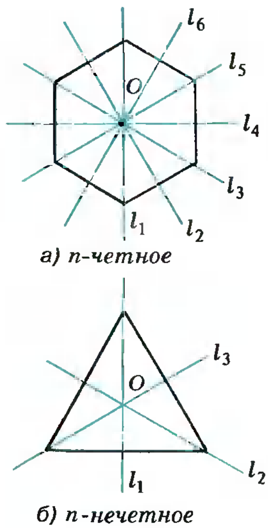


Рис. 30

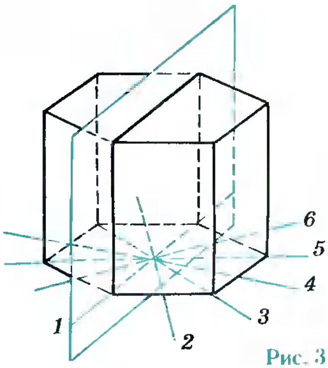
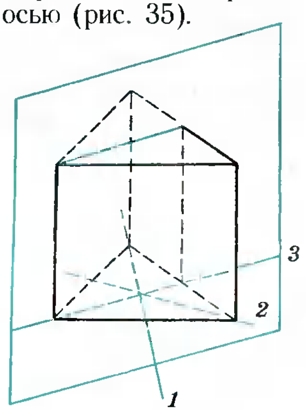


Рис. 31



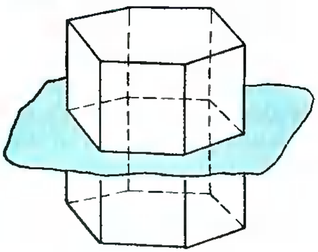


Рис. 32

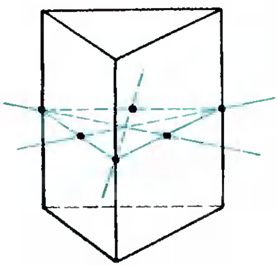


Рис. 33

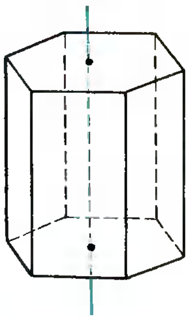


Рис. 34

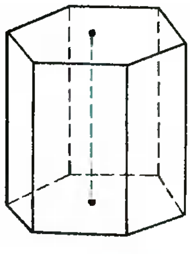


Рис. 35

Если n четно, то середина оси правильной n-угольной призмы является центром симметрии этой призмы (рис. 36). Если же n нечетно, то центра симметрии у правильной призмы нет (как и у ее основания).

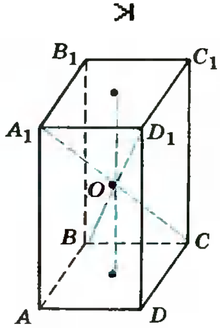


Рис. 36

Итак, симметричность правильной n-угольной призмы определяется симметричностью ее основания — правильного n-угольника. Но, как известно из планиметрии, правильные n-угольники имеют еще один вид симметрии — **поворотную,** т. е. они самосовмещаются при повороте вокруг своего центра на угол $\varphi=\frac{360°}{n}$ (рис. 37), а также на любой угол, кратный φ. Аналогично правильные n-угольные призмы самосовмещаются при повороте вокруг своей оси на такой же угол φ (рис. 38).

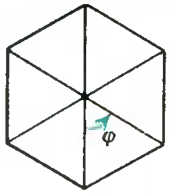


Рис. 37

Подробнее это означает следующее. Плоскости, перпендикулярные оси правильной n-угольной призмы P, параллельны ее основанию. Поэтому все сечения призмы P такими плоскостями равны ее основанию и проектируются на него. Центры этих правильных n-угольников лежат на оси призмы. Поэтому, если эти многоугольники одновременно повернуть в их плоскостях в одном направлении на угол φ вокруг их центров, то все они самосовместятся. Такое преобразование призмы называется **поворотом вокруг прямой** — оси призмы — **на угол** φ. Тем самым призма среди симметрий имеет и поворотную симметрию.

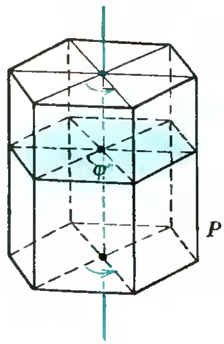


Рис. 38

Заметим еще, что *осевая симметрия в пространстве является поворотом на 180° вокруг оси симметрии.* Действительно, в результате поворота на 180° вокруг прямой a точка X, не лежащая на прямой a, перейдет в такую точку X', что прямая a будет перпендикулярна отрезку XX' и пересечет его в середине.

Задачи

Разбираемся в решении

22.1.(1). Дана прямая треугольная призма достаточной высоты. а) Докажите, что ее боковую поверхность можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник. б) Можно ли ее пересечь плоскостью так, чтобы получился треугольник любой формы, т. е. подобный любому наперед заданному треугольнику?

Решение

а) Пусть треугольник ABC является перпендикулярным сечением призмы. Пусть $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$ ($a\neq b$ или $a\neq c$). Если в сечении призмы можно получить равносторонний треугольник, то любой треугольник, плоскость которого будет параллельна плоскости этого треугольника, также будет равносторонним (?). Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что одна из вершин равностороннего треугольника находится в точке C. Пусть CA_1B_1 — искомый треугольник (рис. 39). Обозначим $|AA_1|=x$, $|BB_1|=y$. Если удастся найти такие x и y, что $|A_1B_1|=|A_1C|=|B_1C|$, то задача будет решена. (Теперь ясно, почему мы одну вершину искомого треугольника взяли в точке C. Если бы не это, то пришлось бы вводить еще одно неизвестное расстояние — $|CC_1|$, и решение получилось бы длиннее.)

Для нахождения x и y легко составить такую систему:

$$a^2+y^2=b^2+x^2=c^2+(y-x)^2 \ (?).$$

Эту систему решите самостоятельно.

Кроме того, заметим, что данный рисунок не является единственно возможным. Искомый треугольник может располагаться так, что его вершины A_1 и B_1 будут находиться по разные стороны от (ABC). Тогда система примет несколько другой вид (?). Решение ее будет таким же. Впрочем, без рассмотрения второй системы можно обойтись, сведя второй случай к первому (?).

Технические трудности существенно возрастут, если вы захотите по этой же идее решить задачу б). Поэтому перейдем к более геометрическому решению этой задачи.

Прежде всего заметим, что хотя бы один из двугранных углов данной призмы меньше 60° (?). Выберем на ребре этого двугранного угла призмы точку A и будем строить равносторонний треугольник с вершиной в точке A, стороны которого лежат на гранях призмы. Тем самым мы несколько ослабляем требование задачи, а значит, несколько упрощаем ее.

Пусть AK и AL — два равных отрезка в гранях призмы и $\angle KAL=60°$. Тогда ясно, что треугольник AKL равносторонний (рис. 40). Если продлим его стороны AK и AL до пересечения с ребрами призмы, то получим треугольник AK_1L_1. Очевидно, что он будет равносторонним, а значит, искомым, если $(K_1L_1)\|(KL)$ (?). Основная идея решения задачи будет основана на том, что «ключевой» треугольник AKL, такой, что $(K_1L_1)\|(KL)$, всегда можно построить.

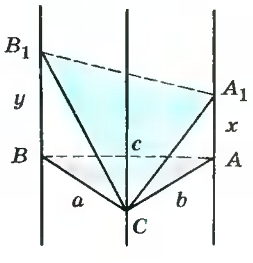


Рис. 39

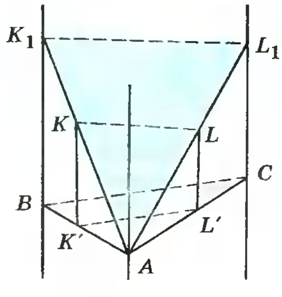


Рис. 40

Самый трудный момент решения — понять, при каком условии будут параллельны (K_1L_1) и (KL). Для этого мы проведем перпендикулярное сечение призмы ABC. Пусть $K'L'$ — проекция отрезка KL на плоскость ABC. Оказывается, $(K_1L_1) \parallel (KL)$ тогда и только тогда, когда $(K'L') \parallel (BC)$ (?). Значит, чтобы добиться параллельности (K_1L_1) и (KL), достаточно добиться параллельности $(K'L')$ и (BC). А это сделать можно.

Точку K' можно получить сколь угодно близкой к точке A (?). Но из этого следует, что

$$|K', (BC)| > |L', (BC)|.$$

Теперь поменяем ролями точки K' и L'. Но тогда

$$|K', (BC)| < |L', (BC)|.$$

Из соображений непрерывности найдется такое положение точек K и L, что $|K', (BC)| = |L', (BC)|$. Но тогда $(K'L') \parallel (BC)$, т. е. $(K_1L_1) \parallel (KL)$, и «ключевой» треугольник существует.

Для окончательной отделки решения необходимо обосновать расположение треугольника AKL выше плоскости ABC. Но это вы сделайте самостоятельно (?).

Решение задачи б) по идее совершенно такое же.

Дополняем теорию

22.2.(1). Если боковую поверхность призмы (или ее продолжение) пересечь плоскостью, перпендикулярной боковому ребру (или его продолжению), то получится многоугольник, который называется перпендикулярным сечением призмы. Докажите, что все перпендикулярные сечения призмы равны.

22.3.(1). Докажите, что около правильной призмы можно описать сферу.

22.4.(1). При каком условии в правильную призму можно вписать сферу?

22.5.(2). В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены сечения A_1BD и CB_1D_1. Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда делится ими на три равные части. Докажите, что она пересекает эти сечения в точках пересечения медиан.

Представляем

22.6.(2). Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно построить параллелепипедов, четыре вершины каждого из которых находятся в этих точках?

Планируем

22.7.(1). Основанием треугольной призмы является равнобедренный прямоугольный треугольник. Ровно одна ее грань — квадрат. Известны длины ее ребер и высота. Как вычислить угол между: а) боковым ребром и скрещивающимся с ним ребром основания; б) боковым ребром и плоскостью основания; в) большим ребром основания и боковой гранью; г) плоскостью боковой грани, являющейся квадратом, и плоскостью основания; д) плоскостями боковых граней? Выберите числовые данные и получите результат.

Находим величину

22.8.(1). В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ грань AA_1C_1C — прямоугольник, а две другие боковые грани — ромбы с острым углом φ при вершине B_1. $|AC|=4$, $|BC|=3$. Вычислите периметр и площадь перпендикулярного сечения призмы.

22.9.(2). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $|AA_1|=1$, $|AB|=2$, $|AD|=3$. Вычислите: а) углы, которые образует (BC_1D) с плоскостью основания и плоскостями боковых граней; б) угол между (B_1AC) и (D_1AC).

22.10.(2). Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромбы. Их равные острые углы сходятся в вершине A. Пусть каждое его ребро равно 1, а острый угол в грани равен 60°. 1) Чему равен угол φ между: а) боковым ребром и плоскостью основания; б) (CD) и (BB_1D); в) (AD) и (AA_1C_1); г) (CDD_1) и (CBB_1); д) (AA_1C_1) и (BB_1D_1)? 2) Чему равно расстояние: а) от A_1 до основания; б) от A до (BDD_1); в) от C_1 до (B_1D_1C); г) между (AA_1) и (BD)?

22.11.(2). В прямоугольном параллелепипеде через диагональ основания провели сечение, параллельное его диагонали, которое оказалось равносторонним треугольником. Большее ребро параллелепипеда равно 1. Вычислите остальные его ребра.

Ищем границы

22.12.(1). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, каждое ребро которой равно 1, через (BC) провели плоскость сечения призмы под углом φ к плоскости основания. Чему равна площадь сечения? В каких границах она находится?

22.13.(1). В правильной треугольной призме, каждое ребро которой равно 1, провели сечение, параллельное стороне основания и проходящее через: а) противоположную вершину этого же основания; б) ребро, параллельное данной стороне. В каких границах находится площадь сечения?

22.14.(1). Каждое ребро правильной треугольной призмы равно 1. Каков кратчайший путь по поверхности из середины ребра верхнего основания в противоположную вершину нижнего основания?

22.15.(2). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, в котором $|AD|=30$, $|AB|=|AA_1|=12$. Точки K и L лежат на средних линиях противоположных граней, причем расстояние от K до (ABC) равно расстоянию от L до $(A_1B_1C_1)$ и равно 1. Каков кратчайший путь из K в L по поверхности параллелепипеда?

Исследуем

22.16.(1). В треугольной призме проведены сечения через ребро каждого из оснований и противоположную вершину другого основания. Есть ли точка, общая для всех этих сечений?

22.17.(1). Существует ли треугольная призма, у которой: а) ровно одна боковая грань — прямоугольник; б) ровно две боковые грани — прямоугольники; в) ровно одна грань перпендикулярна основанию; г) ровно две грани перпендикулярны основанию; д) боковое ребро перпендикулярно ровно одной стороне основания; е) центр вписанной сферы не совпадает с центром описанной сферы?

22.18.(1). Является ли призма правильной, если: а) все ее ребра равны; б) все боковые грани — прямоугольники; в) все диагональные сечения равны; г) около нее можно описать сферу; д) в нее можно вписать сферу; е) существует точка, равноудаленная от ее ребер?

22.19.(1). В наклонной треугольной призме перпендикулярное сечение является равносторонним треугольником. Площадь одной ее боковой грани равна S. а) Найдите площади остальных боковых граней. б) Можете ли вы найти расстояние от бокового ребра до плоскости противоположной грани? в) Можете ли вы найти площадь основания?

22.20.(2). Сколько граней, являющихся прямоугольниками, может быть в параллелепипеде?

22.21.(2). Установите вид параллелепипеда, если: а) все его грани равны; б) все его грани равновелики; в) все его диагонали равны; г) два диагональных сечения перпендикулярны основанию; д) две его смежные грани — квадраты; е) перпендикулярное сечение к каждому ребру является прямоугольником; ж) около него можно описать сферу; з) в него можно вписать сферу. (Диагональное сечение параллелепипеда и вообще призмы проходит через соответствующие параллельные диагонали оснований призмы.)

22.22.(2). Докажите, что углы, которые диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами, выходящими из той же вершины, дают в сумме меньше, чем 180°. Можно ли улучшить эту оценку? Как изменятся полученные вами результаты, если вместо ребер взять диагонали граней, имеющие с данной диагональю общую вершину?

22.23.(2). Дана четырехугольная призма. Сколько ее диагоналей должны пересечься в одной точке, чтобы эта призма оказалась параллелепипедом?

Переключаемся

22.24.(1). Дана треугольная призма. Замеры можно делать только на ее поверхности. Как вычислить углы между: а) боковым ребром и основанием; б) ребром основания и боковой гранью; в) боковой гранью и основанием; г) двумя боковыми гранями?

§ 23. Пирамиды

23.1. Пирамида — частный случай конуса

Знакомиться с пирамидами, как и с призмами, мы начали уже во введении. Напомним, что там мы определили пирамиду как многогранник, у которого одна грань — какой-либо многоугольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной (рис. 41).

Первую грань называют **основанием пирамиды,** а остальные — **боковыми гранями.** Их общая вершина называется **вершиной пирамиды.** Боковые ребра пирамиды — это ребра, сходящиеся в вершине пирамиды.

Из этого определения ясно, что любая пирамида однозначно задается своей вершиной и своим основанием. Построение пирамиды с заданной вершиной и заданным основанием было проведено в п. 5.4. Теперь, когда мы знаем определение конуса, понятно, что в результате проведенного там построения был получен конус, основание которого — многоугольник.

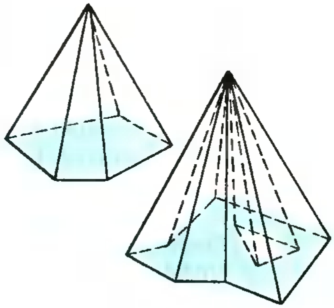


Рис. 41

Итак, **пирамида — это конус, основание которого многоугольник.** Это еще одно определение пирамиды.

Можно сказать и так: *многогранник, являющийся конусом,— это пирамида,* а также *конус, являющийся многогранником,— это тоже пирамида.*

Пирамида — это конус среди многогранников и многогранник среди конусов.

Объединение боковых граней пирамиды называется ее **боковой поверхностью. Поверхностью пирамиды** является объединение оснований пирамиды и ее боковой поверхности.

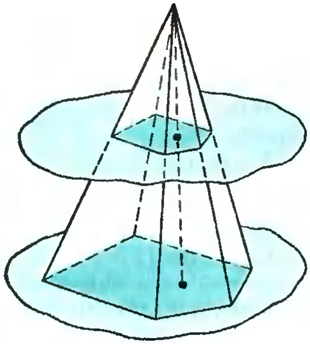


Рис. 42

Поскольку пирамида — конус, то все понятия, относящиеся к конусам, относятся и к пирамидам. Например, **усеченная пирамида** получается из пирамиды так же, как получается усеченный конус из конуса: отсечением меньшей пирамиды плоскостью, параллельной основанию исходной пирамиды (рис. 42). Все сказанное об усеченном конусе в п. 19.4 относится и к усеченной пирамиде. *Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники, а боковые грани усеченной пирамиды — трапеции* (рис. 43).

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также длина этого перпендикуляра называются **высотой пирамиды.**

Если основание пирамиды — простой n-угольник, то пирамиду называют **n-угольной.**

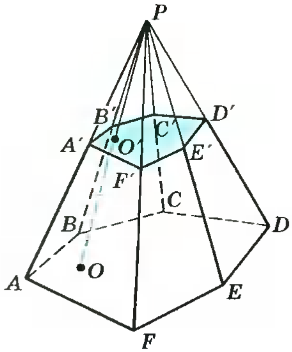


Рис. 43

Простейшей пирамидой (и вообще простейшим многогранником) является треугольная пирамида — тетраэдр (что по-гречески значит четырехгранник): у нее наименьшее возможное число граней — всего четыре. Любая ее грань может считаться основанием (этим она отличается от других пирамид).

23.2. Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной,** если ее основание — правильный многоугольник и вершина пирамиды проектируется в центр этого многоугольника (рис. 44).

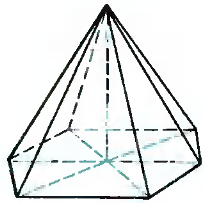


Рис. 44

Это определение позволяет легко строить правильные пирамиды и тем доказать существование таких пирамид. Для такого построения достаточно взять любой правильный многоугольник, из его центра провести перпендикуляр к плоскости многоугольника и соединить какую-нибудь точку перпендикуляра (отличную от его основания) с точками многоугольника отрезками.

Однако такое определение не позволяет легко проверить, будет ли правильной данная реальная пирамида (например, деревянная или металлическая). Это можно сделать, используя следующие два свойства правильных пирамид.

Свойство 1

Боковые ребра правильной пирамиды равны.

Свойство 2

Боковые грани правильной пирамиды — равные друг другу равнобедренные треугольники.

Докажите эти свойства самостоятельно.

Свойства 1 и 2 характеризуют правильную пирамиду, так что с их помощью можно дать два других ее определения.

1. Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а боковые ребра равны.

2. Пирамида называется правильной, если ее боковые грани — равные равнобедренные треугольники, основания которых принадлежат основанию пирамиды.

Правильную пирамиду рисуют так. Сначала рисуют изображение правильного многоугольника, лежащего в основании, и его центра O. Потом изображают высоту пирамиды, проводя вертикальный отрезок OP (его вертикальность дает большую наглядность рисунка). Затем точку P соединяют со всеми вершинами основания.

Правильная усеченная пирамида является частью соответствующей правильной пирамиды. Ее основания — правильные многоугольники, а боковые грани — равные равнобокие трапеции.

23.3. Симметрия правильной пирамиды

У правильной n-угольной пирамиды n плоскостей симметрии. Они проходят через вершину пирамиды и оси симметрии ее основания (рис. 45). При отражении в такой плоскости вершина пирамиды остается на месте, а основание совмещается само с собой, поэтому и пирамида самосовмещается.

Кроме того, правильная n-угольная пирамида совмещается сама с собой при повороте вокруг прямой, содержащей ее высоту, на угол $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$, а также на любой угол, кратный φ (рис. 46).

Если n четно, то правильная n-угольная пирамида имеет одну ось симметрии, содержащую вершину пирамиды. Если же n нечетно, то осей симметрии у правильной n-угольной пирамиды нет. Других движений, совмещающих правильную пирамиду саму с собой, кроме случая, когда она является правильным тетраэдром, нет. Симметрия правильного тетраэдра будет подробно рассмотрена в § 26. Центров симметрии у пирамид нет.

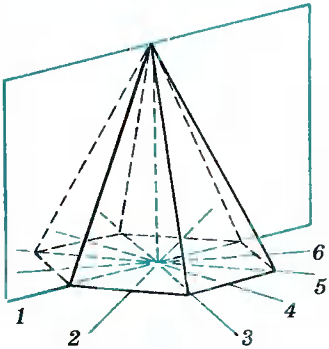


Рис. 45

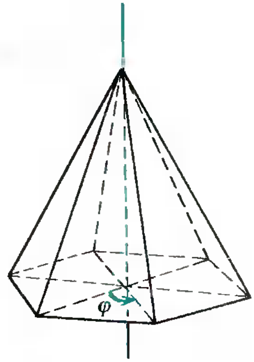


Рис. 46

Задачи

Разбираемся в решении

23.1.(1). Известны длины ребер тетраэдра. Как найти его высоту?

Решение

Пусть $PABC$ — данный тетраэдр, PQ — искомая высота.

Длину отрезка PQ найдем из какого-либо треугольника, в котором он находится. Таким треугольником может быть треугольник PQQ_1, где QQ_1 —перпендикуляр из Q на (BC) (рис. 47). $|PQ_1|$ находим из треугольника PBC (?). $\angle PQ_1Q$ — линейный угол двугранного угла при ребре BC. Его можно найти по теореме косинусов для трехгранного угла с вершиной B (или C).

После этого находим $|PQ|$.

В этом несложном решении осталось обосновать его независимость от рисунка. Положение точки Q_1 для решения несущественно (?). Впрочем, если точка Q находится внутри треугольника ABC, то хотя бы

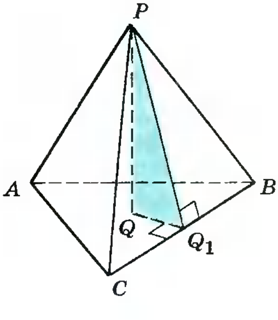


Рис. 47

одна проекция точки Q на прямые, проходящие через стороны треугольника, будет лежать внутри стороны треугольника ABC (?), ее и можно назвать точкой Q_1. А что если точка Q находится вне треугольника ABC? Есть два варианта ответа. Первый — убедиться в том, что для любого положения точки Q по отношению к треугольнику ABC решение принципиально не меняется (?). Второй — доказать, что в любом тетраэдре проекция хоть одной вершины лежит внутри противоположной ей грани, и тем самым свести задачу к уже рассмотренному случаю (?).

Вычислительная часть этой задачи довольно длинная. Тем любопытнее то обстоятельство, что ответ может быть получен без всяких вычислений. Отрезок, равный высоте тетраэдра, может быть построен циркулем и линейкой (?)!

Эту задачу мы решали в предположении, что тетраэдр дан. Но на нее можно посмотреть несколько иначе.

Поставим вопрос: «Можно ли построить тетраэдр, ребра которого равны шести данным отрезкам?» (Аналогичная задача на плоскости хорошо известна.) К решению этой задачи можно подойти разными путями. Один из них идет от задачи, рассмотренной нами только что (?).

Дополняем теорию

23.2.(2). Докажите, что в правильной пирамиде: а) проекция высоты на боковую грань лежит на высоте грани (апофеме пирамиды); б) проекция высоты на ребро основания — его середина; в) каждая точка высоты равноудалена от боковых ребер, вершин основания, ребер основания, боковых граней; г) угол между боковым ребром и плоскостью основания один и тот же для всех боковых ребер; д) угол между боковой гранью и основанием для всех боковых граней один и тот же; е) все углы между соседними боковыми гранями равны. Сформулируйте сами другие свойства правильной пирамиды.

23.3.(2). Докажите, что: а) около правильной приравиды можно описать сферу; б) в правильную пирамиду можно вписать сферу.

23.4.(2). В правильной n-угольной пирамиде известна сторона основания и плоский угол при вершине. Найдите: а) высоту пирамиды; б) радиус описанной сферы; в) радиус вписанной сферы; г) угол между боковым ребром и плоскостью основания; д) угол между апофемой и плоскостью основания; е) угол между боковой гранью и основанием; ж) угол между соседними боковыми гранями; з) расстояние между элементами пирамиды, которые вы выбрали сами; и) угол между элементами пирамиды, которые вы выбрали сами.

23.5.(2). В правильной n-угольной усеченной пирамиде известны стороны оснований и боковое ребро. Найдите высоту пирамиды. Выберите сами элементы этой пирамиды и найдите расстояние между ними. Найдите сами какой-либо угол в этой пирамиде.

23.6.(2). В тетраэдре проведены отрезки, соединяющие его вершины с точками пересечения медиан противоположных граней. Докажите, что эти отрезки имеют общую точку. В каком отношении они делятся этой точкой?

Представляем

23.7.(1). Основанием пирамиды является квадрат. Сколько ее граней могут быть прямоугольными треугольниками?

23.8.(1). Может ли сумма плоских углов при вершине пирамиды быть больше $360°$?

23.9.(1). Каким многоугольником может быть основание пирамиды, у которой равны углы между основанием и боковыми: а) ребрами; б) гранями?

23.10.(2). Могут ли две грани правильной пирамиды быть взаимно перпендикулярными?

Планируем

23.11.(1). Площадь основания пирамиды равна S, а высота — H. В ней проведены два сечения, параллельные основанию, с площадями S_1 и S_2. Как узнать расстояние между ними?

23.12.(1). Пусть известны все ребра тетраэдра. Как найти угол между его скрещивающимися ребрами?

Находим величину

23.13.(1). В тетраэдре $PABC$ основанием является правильный треугольник. $(PB)\perp(ABC)$, $PB=AB$. Вычислите угол φ между: а) (PC) и (AB); б) (AC) и (PCB); в) (BC) и (PAC); г) (PAC) и (ABC); д) (PAC) и (PBC).

23.14.(1). В тетраэдре $PABC$ основанием является правильный треугольник. $(PBC)\perp(ABC)$, другие боковые грани составляют с основанием угол φ. Чему равен угол x между: а) (PA) и (BC); б) (PB) и (AC); в) (PA) и (ABC); г) (PAB) и (PAC); д) (PAC) и (PBC)?

23.15.(1). Основанием пирамиды $PABCD$ является квадрат. $(PB)\perp(ABC)$, $PB=AB$. Вычислите угол φ между: а) (PD) и (AB); б) (PD) и (APC); в) (AD) и (PCD); г) (PAB) и (PCD); д) (PAD) и (PCD).

23.16.(2). Через ребро AC правильной пирамиды $PABC$ провели сечение. Ребро основания пирамиды равно ее высоте и равно d. Вычислите площадь сечения, если: а) плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол $30°$; б) плоскость сечения делит пополам двугранный угол при ребре AC; в) плоскость сечения проходит через середину ребра PB.

Ищем границы

23.17.(1). В каких границах лежит двугранный угол между соседними боковыми гранями в правильной треугольной пирамиде? Обобщите полученный результат.

23.18.(1). В основании пирамиды лежит прямоугольник. Все ее боковые грани — прямоугольные треугольники. Через ее наибольшее ребро проводится переменное сечение. Когда его площадь достигнет наибольшего и наименьшего значений?

23.19.(1). Основанием четырехугольной пирамиды является квадрат с известной стороной. Одна ее грань — равносторонний треугольник, две другие —

прямоугольные треугольники. Проводятся сечения, перпендикулярные основанию и грани, являющейся равносторонним треугольником. В каких границах лежит его площадь?

23.20.(2). а) Внутри основания правильной треугольной пирамиды взята точка M и через нее проведена прямая, перпендикулярная основанию. Она встречает плоскости граней пирамиды в точках M_1, M_2, M_3. В каких границах лежит сумма MM_1, MM_2, MM_3? б) Обобщите задачу.

23.21.(2). Все ребра четырехугольной пирамиды $PABCD$ равны. а) Пусть точка K — середина ребра PA, а точка M — середина ребра BC. Каков кратчайший путь из K в M по поверхности пирамиды? б) Выберите сами другую пару точек на ее поверхности и решите аналогичную задачу.

23.22.(2). Дана правильная четырехугольная усеченная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через диагональ основания AC и точку K на отрезке B_1D_1 провели сечение. $|AB|=2$, $|AA_1|=1$, $|A_1B_1|=1$. Пусть $|B_1K|=x$. Выразите периметр и площадь такого сечения как функцию от x. Можете ли вы вычислить ее наибольшее и наименьшее значения?

Доказываем

23.23.(1). Докажите, что: а) хотя бы при одной вершине тетраэдра все углы острые; б) если все двугранные углы тетраэдра острые, то и все плоские его углы острые. Проверьте обратное.

23.24.(1). Через каждое ребро тетраэдра и середину противоположного к нему ребра провели сечение. Докажите, что все такие сечения имеют общую точку.

23.25.(1). Одна из высот тетраэдра проходит через точку пересечения высот грани. Докажите, что остальные высоты обладают тем же свойством.

23.26.(1). Центр основания правильной пирамиды проектируется на все ее боковые грани (ребра). Докажите, что все его проекции являются вершинами правильного многоугольника.

Исследуем

23.27.(1). Сколько граней тетраэдра могут быть: а) остроугольными треугольниками; б) прямоугольными треугольниками; в) тупоугольными треугольниками?

23.28.(1). В тетраэдре провели сечение, подобное основанию. Значит ли это, что оно параллельно основанию?

23.29.(1). Даны шесть отрезков с длинами 2, 3, 4, 5, 6, 7. Существует ли тетраэдр с такими ребрами?

23.30.(1). Сколько высот тетраэдра могут пересекаться в одной и той же точке?

23.31.(1). Какими свойствами обладает тетраэдр, в котором: а) противоположные ребра попарно равны; б) противоположные ребра попарно перпендикулярны; в) противоположные двугранные углы попарно равны; г) при одной вершине сходятся три прямых угла; д) пересекаются в одной и той же точке все высоты.

23.32.(1). Дан треугольник. Перегибанием по трем прямым из него хотят получить тетраэдр. Любой ли треугольник годится для этого?

23.33.(1). Дан квадрат. Можно ли провести внутри его отрезки так, чтобы получилась развертка тетраэдра?

23.34.(1). Нарисуйте какую-либо развертку тетраэдра. Отметьте на ней две любые точки. Можете ли вы узнать, какое будет между ними расстояние, когда из этой развертки будет сделан тетраэдр?

23.35.(1). В основании пирамиды лежит квадрат. Вершина пирамиды проектируется в вершину основания. Два боковых ребра пирамиды равны d_1 и d_2 ($d_2>d_1$). Можете ли вы найти другие боковые ребра пирамиды?

23.36.(2). В основании пирамиды лежит прямоугольник. Ее вершина проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Какие свойства этой пирамиды аналогичны свойствам правильной пирамиды? А какие ее свойства отличны от свойств правильной пирамиды? Ответьте на эти же вопросы для аналогичной пирамиды, основанием которой является ромб.

23.37.(2). В правильной n-угольной пирамиде рассмотрим две точки: центр описанной сферы и центр вписанной сферы. а) Требуется установить, в каком порядке они расположены на прямой, проходящей через высоту пирамиды, и чему равно расстояние между ними, если ребро основания пирамиды равно d, а высота пирамиды равна h. б) Пусть они совпадают. Можете ли вы найти плоский угол при вершине пирамиды?

23.38.(2). Известна площадь боковой грани правильной n-угольной пирамиды. Сможете ли вы найти площадь сечения пирамиды, параллельного этой грани и проходящего через: а) центр основания; б) середину ее высоты?

23.39.(2). Из куска картона в форме квадрата хотят сделать правильную треугольную пирамиду с плоским углом при вершине 30°. Какую выбрать ее развертку, чтобы получить меньше всего отходов?

Переключаемся

23.40.(1). Какие необходимо сделать измерения на поверхности тетраэдра, чтобы вычислить угол: а) между некоторым его ребром и гранью, в которую оно упирается; б) между двумя фиксированными его гранями?

23.41.(1). Из одной точки одновременно и в разных направлениях полетели четыре вороны. В некоторый момент времени они оказались в одной плоскости. Повторится ли еще такая ситуация?

Прикладная геометрия

23.42.(1). $|A\alpha|=d_1\neq0$, $|\alpha\beta|=d_2\neq0$. В плоскости α расположен треугольник площадью S, а в точке A — точечный источник света. Найдите площадь тени треугольника на плоскости β. Как изменяется эта площадь при: а) $d_1\to\infty$; б) $d_1\to0$; в) $d_2\to\infty$; г) $d_2\to0$?

Участвуем в олимпиаде

23.43.(1). Докажите, что площадь треугольного сечения тетраэдра не больше площади хотя бы одной его грани.

§ 24*. Выпуклые многогранники

24.1. Характерные свойства выпуклых многогранников

Что такое **выпуклый многогранник**, ясно из названия: это многогранник, любые две точки которого соединимы в нем отрезком.

Выпуклые многогранники обладают многими замечательными свойствами. Здесь мы приведем некоторые общие теоремы об их свойствах. Прежде всего покажем возможность другого определения выпуклого многогранника. Она вытекает из двух теорем.

Теорема 24.1

Плоскость каждой грани выпуклого многогранника является его опорной плоскостью, т. е. выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани (не считая, конечно, самой грани).

Доказательство. Допустим, что выпуклый многогранник P не лежит по одну сторону от плоскости α некоторой своей грани Q. Тогда в P имеются точки A и B, лежащие по разные стороны от α (рис. 48). Соединяя A и B со всеми точками грани Q, мы получили бы многогранник P_1, состоящий из двух пирамид с общим основанием Q. Так как многогранник P выпуклый, то $P_1 \subset P$. Внутренние точки грани Q лежат внутри P_1, а поскольку $P_1 \subset P$, то эти точки лежат внутри P, что невозможно, так как грань Q лежит на границе P. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

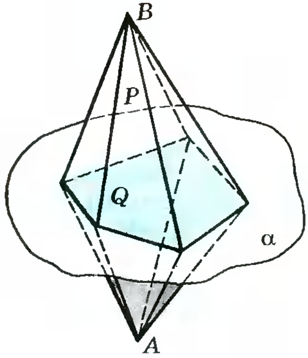


Рис. 48

Эта теорема наглядно может быть истолкована так: выпуклый многогранник можно приложить к плоской поверхности, например к столу, каждой гранью.

Прежде чем доказать теорему, обратную ей, докажем лемму.

Лемма 24.1 *(об отделимости)*

Пусть многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Тогда если точка A не принадлежит этому многограннику, то у него найдется такая грань, что A и все внутренние точки данного многогранника лежат по разные стороны от плоскости этой грани, т. е. такая плоскость отделяет A от данного многогранника (рис. 49).

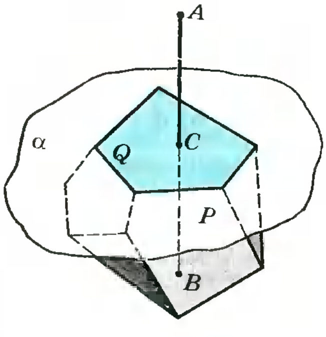


Рис. 49

Доказательство. Пусть многогранник P лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани и точка A не принадлежит P. Отрезок, соединяющий точку A с любой точкой B, лежащей внутри P, пересекает поверхность многогранника P и тем самым имеет хотя бы с одной гранью Q общую точку.

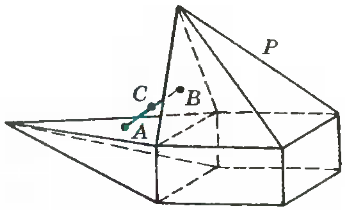


Рис. 50

Пусть α — плоскость грани Q. Многогранник лежит по одну сторону от нее, поэтому она не проходит через его внутреннюю точку B. Значит, α пересекает отрезок AB в точке C, лежащей между A и B. Так как многогранник лежит по одну сторону от α, там, где лежит его точка B, а точка A по другую сторону от α, то, значит, точка A отделена от многогранника плоскостью α. ■

Теорема 24.2

Если многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, то он выпуклый.

Доказательство. Пусть многогранник P лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Допустим, что он не выпуклый. Тогда в P найдутся такие точки A и B, что на отрезке AB есть точка C, не принадлежащая P (рис. 50). Эта точка C по лемме об отделимости должна была бы отделяться от P плоскостью. Такая плоскость имела бы общую точку, отличную от C, как с отрезком AC, так и с отрезком CB. Но это невозможно, так как плоскость может пересекать прямую лишь в одной точке. Итак, P — выпуклый многогранник. ■

Таким образом, *многогранник выпуклый тогда и только тогда*, когда через каждую его граничную точку проходит опорная плоскость, или, что то же самое, *когда он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани*. Этим свойством часто определяют выпуклый многогранник.

24.2. Грани и сечения выпуклого многогранника

Теорема 24.3

Каждая грань выпуклого многогранника является выпуклым многоугольником.

Доказательство. Пусть Q — грань выпуклого многогранника P, а α — плоскость грани Q (рис. 51). Как доказано в п. 24.1, плоскость α опорная для многогранника P. Поэтому пересечение $P \cap \alpha$ содержится в границе многогранника P и, значит, состоит из многоугольников. Вместе с тем это пересечение $P \cap \alpha$ выпукло как пересечение выпуклых фигур. Следовательно, оно представляет собой один выпуклый многоугольник. Он содержит грань Q, а значит, совпадает с ней (так как грань по определению — это многоугольник на границе многогранника, который уже не содержится ни в каком другом).

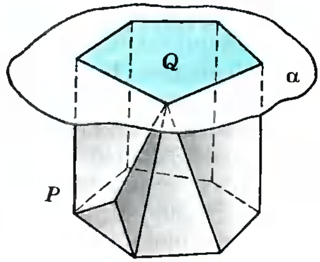


Рис. 51

Таким образом, грань Q есть выпуклый многоугольник.

Теорема 24.4

Плоскость, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многогранника, пересекает его по выпуклому многоугольнику.

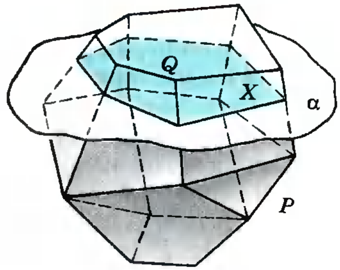


Рис. 52

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через внутреннюю точку X выпуклого многогранника P. Тогда фигура $Q=P \cap \alpha$ выпукла (рис. 52) и содержит внутренние точки (X — внутренняя точка фигуры Q в плоскости α). Кроме того, граница фигуры Q есть пересечение плоскости α с границей многогранника P и поэтому состоит из конечного числа отрезков. Значит, Q — выпуклый многоугольник. ■

В дополнение можно сказать: пересечение выпуклого многогранника с его опорной плоскостью есть либо грань, либо ребро, либо вершина этого многогранника.

Дополнение к параграфу 24*

Выпуклые многогранники и выпуклые оболочки

Идея понятия выпуклой оболочки состоит в том, что выпуклая оболочка некоторого множества F является наименьшим выпуклым множеством, содержащим F (рис. 53). А точное определение его таково:

Выпуклой оболочкой множества F называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих F (рис. 54). Оно обозначается CoF.

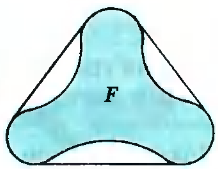


Рис. 53

Поскольку пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество, то выпуклая оболочка множества является выпуклым множеством.

Выпуклая оболочка выпуклой фигуры есть, очевидно, сама эта фигура.

Нас будут интересовать выпуклые оболочки конечного числа точек.

Очевидно, *выпуклой оболочкой одной точки является сама точка.*

Выпуклой оболочкой двух точек A_1, A_2 является отрезок A_1A_2 (рис. 55, *а*). Действительно, отрезок A_1A_2 является выпуклым множеством, содержащим точки A_1, A_2. С другой стороны, любое выпуклое множество, содержащее A_1 и A_2, содержит и отрезок A_1A_2. Поэтому $Co\{A_1, A_2\}=A_1A_2$. ■

Ясно, что выпуклой оболочкой любой системы S конечного числа точек A_1, A_2, ..., A_n, лежащих на одной прямой (рис. 55, *б*), является отрезок, соединяющий наиболее удаленные точки A_iA_k из этой системы S.

Рассмотрим систему S, состоящую из трех точек A_1, A_2, A_3, не лежащих на одной прямой. Чтобы получить выпуклую оболочку этих трех точек, следует точку A_3 соединить со всеми точками отрезка A_1A_2 (рис. 56). В результате получим треугольник $A_1A_2A_3$, который и является выпуклой оболочкой точек A_1, A_2, A_3.

Добавим к трем точкам A_1, A_2, A_3 еще одну точку A_4 и будем искать выпуклую оболочку системы из четырех точек.

Возможны такие случаи:

1) Точка A_4 принадлежит треугольнику $A_1A_2A_3$. Ясно, что тогда $Co\{A_1, A_2, A_3, A_4\}=\triangle A_1A_2A_3$ (рис. 57, *а*).

2) Точка A_4 не принадлежит треугольнику $A_1A_2A_3$, но лежит в плоскости этого треугольника (рис. 57, *б, в*). Тогда снова выпуклую оболочку системы A_1, A_2, A_3, A_4 получим, соединяя точку A_4 с точками треугольника $A_1A_2A_3$. В результате получим либо выпуклый четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 57, *б*), либо треугольник, одной из вершин которого является A_4, а две другие вершины лежат в двух из трех точек A_1, A_2, A_3 (рис. 57, *в*).

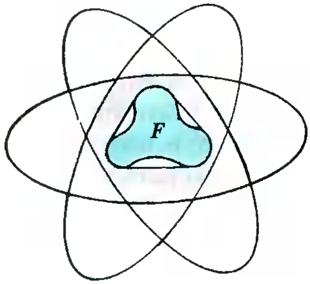


Рис. 54

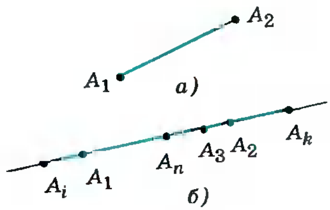


Рис. 55

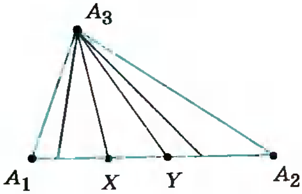


Рис. 56

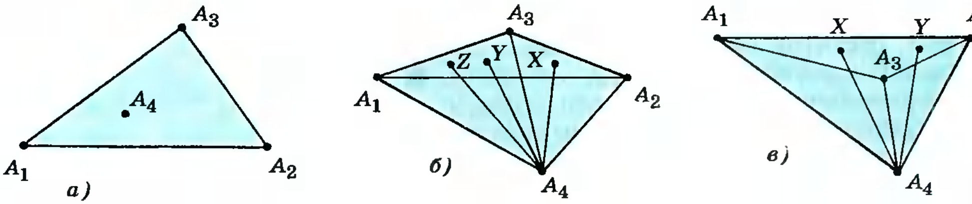


Рис. 57

3) Точка A_4 не принадлежит плоскости треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 58). Выпуклой оболочкой точек A_1, A_2, A_3, A_4 в этом случае является тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, который заполняют отрезки, соединяющие точку A_4 с точками треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 59).

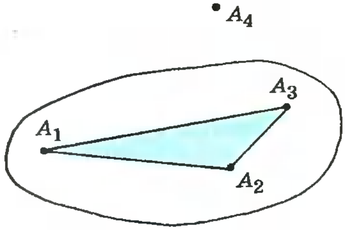


Рис. 58

Проведенные построения подсказывают, как построить выпуклую оболочку F любой системы S, состоящей из $n+1$ точек A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}: надо найти сначала выпуклую оболочку G точек A_1, ..., A_n, а затем соединить отрезками точку A_{n+1} со всеми точками фигуры G (рис. 60). Эти отрезки и заполнят выпуклую оболочку F системы S.

Выделим это утверждение как лемму и докажем ее.

Лемма *(о выпуклой оболочке конечного числа точек)*

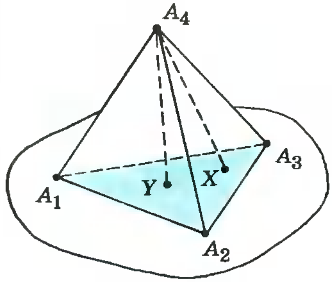


Рис. 59

Выпуклая оболочка F системы точек A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1} является фигурой, заполненной отрезками, которые соединяют точку A_{n+1} со всеми точками выпуклой оболочки G системы точек A_1, A_2, ..., A_n.

Доказательство. Обозначим через H фигуру, заполненную отрезками, которые соединяют точку A_{n+1} со всеми точками фигуры G (рис. 60). Покажем, что фигура H выпукла. Возьмем любые две ее точки X и Y. Они лежат на отрезках $A_{n+1}A$, $A_{n+1}B$, идущих из точки A_{n+1} в некоторые точки A и B фигуры G. Так как G — выпуклая фигура, то она содержит отрезок AB (рис. 61). Но тогда все отрезки, идущие из A_{n+1} в точки отрезка AB, содержатся в фигуре H, а потому и весь треугольник ABA_{n+1} содержится в H. Поскольку отрезок XY содержится в треугольнике ABA_{n+1}, то XY содержится и в фигуре H. Поэтому, фигура H содержит отрезок, соединяющий любые две ее точки, т. е. H — выпуклая фигура.

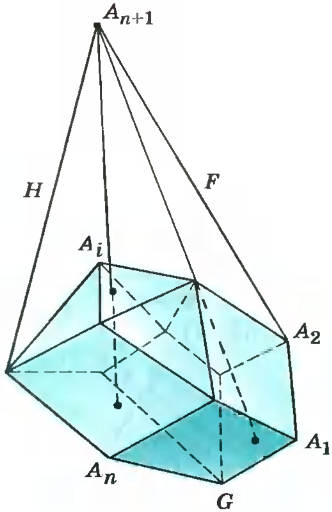


Рис. 60

Итак, H — выпуклая фигура, содержащая точки A_1, A_2, ..., A_{n+1}. Поэтому H содержит выпуклую оболочку F точек A_1, A_2, ..., A_{n+1}.

С другой стороны, H состоит из отрезков, каждый из которых, очевидно, содержится в F. Поэтому H содержится в F. Следовательно, H и F совпадают. ■

Доказанная лемма позволяет сделать вывод, что *выпуклой оболочкой конечной системы точек A_1, ..., A_n, лежащих в одной плоскости, но не лежащих на одной прямой, является выпуклый* многоугольник, вершины которого лежат разве лишь в точках A_1, ..., A_n (может быть, не во всех из них) (рис. 62).

Действительно, такой многоугольник является объединением конечного числа треугольников, имеющих общую вершину A_n, две другие вершины которых лежат в остальных точках данной системы.

Если же точки A_1, ..., A_{n-1}, A_n не лежат в одной плоскости, то их выпуклой оболочкой является выпуклый многогранник, полученный объединением тетраэдров, имеющих общую вершину A_n, три другие вершины которых лежат в остальных точках A_1, ..., A_{n-1} данной системы. Вершины этого многогранника лежат разве лишь в точках данной системы (рис. 63).

В завершение этого пункта докажем теорему, обратную в известном смысле предложениям, установленным выше.

Теорема *(о задании выпуклого многогранника своими вершинами)*

Выпуклый многогранник (а также и выпуклый многоугольник) есть выпуклая оболочка своих вершин и, следовательно, полностью определяется своими вершинами.

Доказательство. Из определения выпуклой оболочки следует, что выпуклая оболочка вершин выпуклого многогранника содержится в этом многограннике. Поэтому достаточно доказать, что, обратно, выпуклый многогранник содержится в выпуклой оболочке своих вершин.

Пусть A — какая-либо точка выпуклого многогранника P. Если она лежит на его ребре, то, очевидно, принадлежит выпуклой оболочке вершин этого ребра. Если точка A лежит внутри грани Q, то проведем через нее отрезок до пересечения с границей грани Q. Тогда концы этого отрезка лежат на ребрах и, следовательно, принадлежат выпуклой оболочке вершин. Но в таком случае и сам отрезок, а вместе с ним и точка A принадлежат этой выпуклой оболочке.

Наконец, если точка A лежит внутри многогранника P, то проводим через нее отрезок до пересечения его с границей многогранника. Тогда по доказанному ранее концы этого отрезка принадлежат выпуклой оболочке вершин, и, значит, сам отрезок, а вместе с ним и точка принадлежат этой выпуклой оболочке.

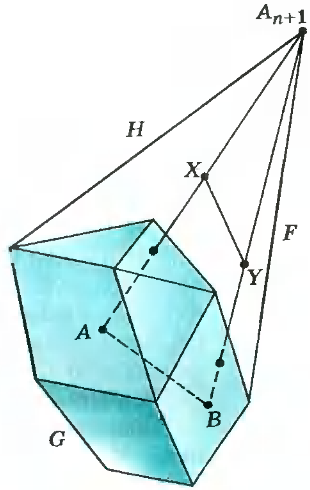


Рис. 61

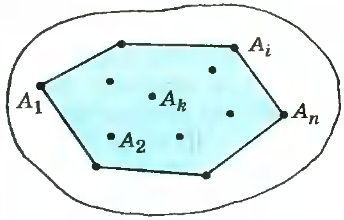


Рис. 62

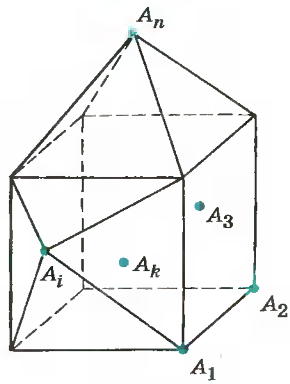


Рис. 63

Замечание. Доказывая эту теорему для многогранника, мы попутно доказали ее утверждение и для многоугольника.

Задачи

Разбираемся в решении

24.1. Дан выпуклый многогранник. Внутри его взяли произвольную точку и спроектировали ее на плоскости всех его граней. Докажите, что хотя бы одна проекция этой точки принадлежит какой-либо грани.

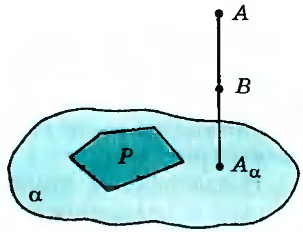


Рис. 64

Решение

Возьмем любую точку A внутри многогранника M. Из всех опорных плоскостей многогранника M, проходящих через его грани, выберем ту, которая ближе всех к A. Назовем ее α. (Если таких плоскостей несколько, то выберем любую из них.)

Пусть A_α — проекция точки A на α, причем A_α не принадлежит грани P многогранника — той грани, которая лежит в плоскости α (рис. 64). Тогда $A_\alpha \notin M$ (?). Но $A \in M$. Значит, отрезок AA_α пересекает границу M в какой-то точке, назовем ее B (?). Эта точка B лежит в некоторой грани Q данного многогранника. Обозначим плоскость этой грани через β. Тогда $|A\beta| \leqslant |AB| < |AA_\alpha| = |A\alpha|$.

Оказалось, что плоскость β ближе к точке A, чем плоскость α, что противоречит выбору плоскости α. Значит, наше предположение о том, что A_α не лежит в грани P, неверно, и на самом деле A_α лежит в грани P.

Полученный результат можно усилить. (Решив задачу, всегда стоит подумать о такой возможности.) А именно можно доказать, что проекция A_α точки A лежит внутри грани P, а не в вершине и не на ребре многогранника. Это мы докажем способом «от противного». Пусть A_α совпадает с вершиной многогранника. Так как AA_α — перпендикуляр из точки A на плоскость α, то AA_α — наклонная к плоскости грани, соседней с P (?). Но тогда плоскость этой соседней с P грани будет ближе к A, чем α, что противоречит выбору плоскости α.

То, что A_α не принадлежит ребру многогранника, вы теперь легко докажете сами.

В итоге получается, что A_α лежит внутри грани P.

Первая часть задачи может быть решена из механических соображений. Пусть поверхность многогранника M сделана из легкого материала, а в выбранной нами точке A сосредоточена значительная масса (в сравнении с массой всей поверхности). Поставим наш многогранник на плоскость какой-либо грани.

Если проекция точки A выходит за пределы этой грани, то положение многогранника будет неустойчивым и он «перекатится» на плоскость другой своей грани. Если новая проекция точки A выйдет за пределы и той грани, то он продолжит свое «перекатывание». Если проекции точки A на плоскости всех его граней будут выходить за пределы этих граней, то «перекатывание» будет идти бесконечно, что противоречит законам механики.

Исходная задача имеет очевидный планиметрический аналог (?). В этой аналогичной задаче вместо многогранника появится, понятно, многоугольник. Здесь можно было бы сказать, что «аналогичная задача имеет и аналогичное решение». В данном случае это верно, но интересно не это. Полученную планиметрическую задачу можно решить исходя из стереометрических соображений! Для этого придадим нашему многоугольнику «толщину», т. е. сделаем его прямой призмой. Получим многогранник, для которого задача уже решена. Конец этого решения додумайте сами.

Дополняем теорию

24.2. Докажите, что диаметром выпуклого многогранника является длина какого-либо отрезка, соединяющего его вершины.

Рисуем

24.3. Можете ли вы нарисовать выпуклый многогранник, у которого: а) вершин столько же, сколько граней; б) вершин в два раза больше, чем граней; в) граней столько же, сколько ребер; г) вершин столько же, сколько ребер; д) треугольных граней столько же, сколько четырехугольных, а никаких других нет?

24.4. Можете ли вы нарисовать многогранник, если его проекции на две перпендикулярные плоскости такие, как показаны на рисунке 65?

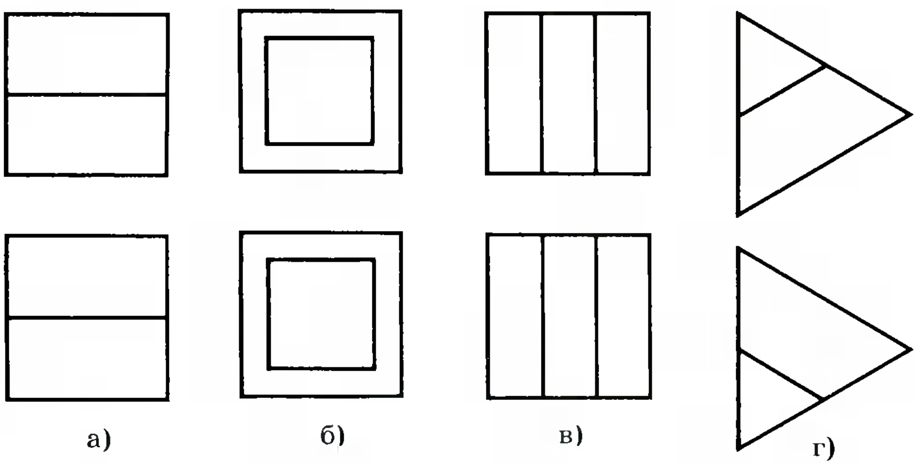


Рис. 65

Представляем

24.5. Следующие многогранники разбейте плоскостями на выпуклые многогранники меньшего диаметра, если дан: а) правильный тетраэдр; б) правильная треугольная призма; в) правильная четырехугольная пирамида; г) объединение двух правильных четырехугольных пирамид, пересечением которых является их общая грань. При этом постарайтесь уменьшить число полученных многогранников.

Доказываем

24.6. Через внутреннюю точку выпуклого многогранника проведена плоскость. Докажите, что она разбивает его на два выпуклых многогранника. Составьте и проверьте обратное утверждение.

Исследуем

24.7. Является ли многогранник выпуклым, если: а) каждое его сечение выпукло; б) любая его ортогональная проекция выпукла; в) вокруг него можно описать сферу; г) в него можно вписать сферу; д) существует сфера, касающаяся всех его ребер?

24.8. Существует ли выпуклый многогранник, у которого: а) все сечения — треугольники; б) все проекции — треугольники; в) все грани — квадраты, но не куб?

24.9. В двух параллельных плоскостях лежат два треугольника. Существует ли выпуклый многогранник, вершинами которого являются вершины этих треугольников? Обобщите этот результат.

Участвуем в олимпиаде

24.10. Докажите, что в каждом выпуклом многограннике найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

§ 25. Теорема Эйлера

Рассмотрим любой выпуклый многогранник P. Пусть e — число его вершин, k — число его ребер, а f — число его граней.

Леонардом Эйлером[1] была доказана удивительная теорема.

[1] Л. Эйлер (1707—1783) — великий математик, физик и астроном; швейцарец по рождению, он был членом Петербургской академии наук и работал в России в 1727—1741 и в 1766—1783 гг.

Теорема Эйлера

Для любого выпуклого многогранника

$$e-k+f=2. \qquad (25.1)$$

Леонард Эйлер

Проверьте это равенство на примерах n-угольной пирамиды, n-угольной призмы или n-угольной усеченной пирамиды.

В этих примерах выпуклость многогранников не предполагается. И действительно, теорема Эйлера справедлива не только для выпуклых многогранников, но и для таких многогранников, которые могут быть получены из выпуклых с помощью непрерывной деформации «без разрывов и склеиваний» (мы не даем точных определений таким деформациям, но интуитивно ясно, о каких деформациях идет речь). При этом ясно, что поскольку в теореме Эйлера речь идет лишь об элементах поверхности многогранника, то в ее условии, говоря «многогранник», можно иметь в виду многогранную поверхность, а не многогранное тело, и эта теорема относится именно к поверхностям, а не к телам.

Более того, в формуле Эйлера величина $e-k+f$ определяется лишь сетью вершин и ребер на поверхности выпуклого многогранника. Эта величина не изменится, если мы деформируем рассматриваемую многогранную поверхность, например, в сферу, а сеть вершин и ребер многогранника в некоторую сеть точек и кривых на сфере. Тогда можно считать e числом вершин такой сети, k числом ее «ребер», а f числом областей, на которые сеть разбивает сферу: эти области на сфере получаются в результате деформации из граней многогранника. Хорошее представление о такой сети дает, например, покрышка футбольного мяча (рис. 66).

Итак, в формуле Эйлера речь идет о таких свойствах фигур, которые сохраняются при непрерывных деформациях фигур «без разрывов и склеиваний». Эти свойства называются топологическими, а раздел математики, изучающий топологические свойства фигур,— топологией. (До XX в. топология была частью геометрии, но теперь она сформировалась в большую самостоятельную область математики.)

Возможностью таких деформаций, не изменяющих чисел e, k, f, мы и воспользуемся при доказательстве теоремы Эйлера. Поступим так. Пусть P — выпуклый многогранник, а e, k, f — числа его вершин, ребер и граней. Удалим из P любую его грань Q, оставив ее

Рис. 66

стороны и вершины (рис. 67). Оставшуюся многогранную поверхность обозначим через P'. Число вершин у P и P' одно и то же — e. Точно так же у P и P' одно и то же число ребер — k. А число f' граней у P' на единицу меньше, чему у P, т. е. $f'=f-1$. Поэтому равенство Эйлера $e-k+f=2$ равносильно равенству

$$e-k+f'=1. \tag{25.2}$$

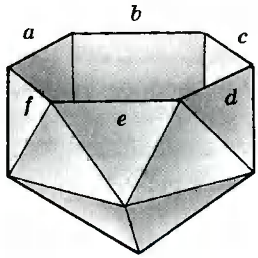


Рис. 67

А его мы докажем с помощью леммы.

Лемма*

Пусть простой многоугольник Q разбит некоторой сетью, состоящей из точек (вершин сети) и соединяющих их отрезков (ребер сети), на f' простых многоугольников T_1, ..., $T_{f'}$. Если e — число вершин в этой сети, а k — число ее ребер (считая вершины и стороны самого многоугольника Q), то $e-k+f'=1$.

Доказательство. Среди простых многоугольников, на которые разбит многоугольник Q, всегда найдется такой многоугольник T_1, что, удалив T_1 из Q, мы снова получим один простой многоугольник Q_1 (рис. 68). (Попробуйте точно обосновать существование такого многоугольника T_1. Вообще говоря, не каждый из многоугольников разбиения, выходящих на границу многоугольника Q, обладает таким свойством. Например, им не обладает многоугольник T_2.)

Удалив многоугольник T_1 из Q, мы удалим все его внутренние точки и только те его вершины (и ребра), которые не являются вершинами (и ребрами) других многоугольников, входящих в разбиение Q. Поэтому если, удаляя многоугольник T_1, мы удалим часть границы многоугольника Q, которая является ломаной, состоящей из m ребер, то мы при этом удалим $m-1$ вершину. Итак, для разбиения многоугольника Q_1 число его вершин $e_1=e-(m-1)$, число его ребер $k_1=k-m$, а число многоугольников $f'_1=f'-1$. Следовательно,

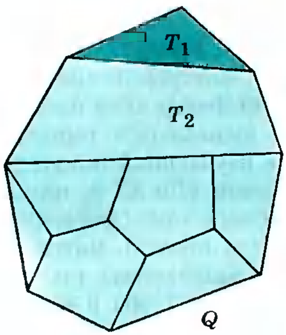


Рис. 68

$$e_1-k_1+f'_1=(e-m+1)-(k-m)+(f'-1)=e-k+f'.$$

Таким образом, число $e-k+f'$ не изменяется при описанном удалении многоугольника T_1. Продолжив такие операции $n=f'-1$ раз, мы придем к одному простому многоугольнику, для которого число его вершин e_n равно числу его ребер k_n, а $f'_n=1$. Поскольку, очевидно, $e_n-k_n+f'_n=1$, а $e-k+f'=e_n-k_n+f'_n$, то равенство $e-k+f'=1$ справедливо. ■

Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы Эйлера, достаточно «растянуть» многогранную поверхность P' вместе с сетью ее вершин и ребер на плоскость в плоский многоугольник и воспользоваться доказанной леммой. То, что это можно сделать, интуитивно ясно, и можно было бы на этом и закончить доказательство. Для тех же, кто хочет подкрепить это интуитивное убеждение некоторым рассуждением, укажем один из способов такого «растяжения».

Возьмем внутри грани Q любую точку O. Луч, идущий из O в любую точку $X \in P'$, пересекает P' лишь в точке X. Ясно, что это свойство сохранится, если точку O чуть сместить до положения O' вне многогранника P (рис. 69). (Попробуйте точно указать, где может находиться такая точка O'.) Спроектируем теперь вершины, ребра и грани многогранника P' из O' на грань Q. Получим в Q сеть, разбивающую Q на f' выпуклых многоугольников $T_1, \ldots, T_{f'}$. В этой сети столько же вершин и ребер (считая вершины и ребра многоугольника Q), сколько вершин и ребер у многогранника P'. Каждый из многоугольников T_i, соответствующий некоторой грани Q_i многогранника P', можно получить так: взять пирамиду с вершиной O' и основанием Q_i и пересечь ее многоугольником Q. К этому разбиению грани Q на многоугольники $T_1, \ldots, T_{f'}$ и применяется лемма.

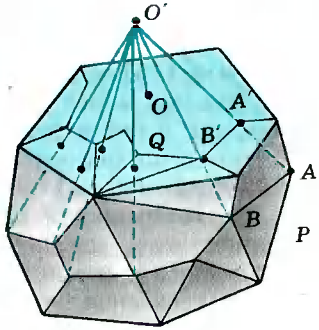


Рис. 69

Замечание. Одним из главных моментов проведенного доказательства является возможность «распрямить и положить на плоскость» поверхность многогранника после того, как у него удалена одна грань, которая является простым многоугольником. Этого нельзя сделать, например, для многогранника, изображенного на рисунке 70. Для него уже $e-k+f \neq 2$.

Но для многогранников любого строения и вообще для тел выполняется обобщенная теорема Эйлера. Для всех сетей, которые могут быть «нарисованы» на поверхности данного тела или любого получаемого из него деформацией без разрывов и склеиваний, число $e-k+f$ одно и то же при условии, что каждую «грань» (область) можно деформировать в простой многоугольник (с тем же числом сторон).

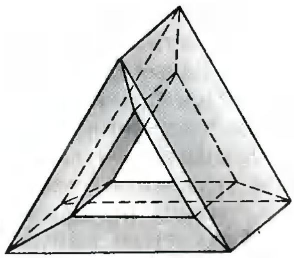


Рис. 70

Вообще же с теоремой Эйлера связаны имена многих геометров. Еще Декарт установил, что число плоских углов замкнутого выпуклого многогранника равно $2f+2e-4$ и что это же число равно $2k$. Но он не видел необходимости соединить эти два утверждения. Зависимость $e-k+f=2$ впервые заметил Эйлер в 1750 г., когда он попытался дать классификацию многогранников. Он проверил формулу на многих многогранниках, а затем в 1751 г. предложил ее доказательство.

С тех пор много раз уточнялось как само утверждение, так и его доказательство. Сам Эйлер полагал, что оно верно для всех многогранников. Но в 1812 г. С. А. Ж. Люилье (1750—1840) указал контрпример: куб, из внутренности которого удален меньший куб. В самом деле, для такого многогранника $e-k+f=4$. Приводились и другие контрпримеры.

Для «спасения» теоремы потребовалось заняться уточнением понятия «многогранник». Эйлер, как и мы, понимал под многогранником тело, поверхность которого состоит из многоугольников. (Любопытно, что у Евклида определения многогранника в явном виде не было.)

Контрпример Люилье был отвергнут таким соображением: в многограннике точка должна непрерывно двигаться по всей его поверхности. Но для многогранника, изображенного на рисунке 70, это выполняется, однако для него $e-k+f=0$.

В дальнейших уточнениях понятия многогранника и теоремы Эйлера принимали участие многие знаменитые геометры: А. Ф. Мёбиус (1790—1868), Л. Пуансо (1777—1859), К. Жордан (1838—1922), А. Пуанкаре (1854—1912). И когда в конце XIX в. из геометрии выделилась новая математическая наука — топология (см. п. 46.4), то стало ясно, что теорема Эйлера имеет топологический характер и является одним из фундаментальных результатов топологии.

Дополнение к параграфу 25

Развертка выпуклого многогранника

О развертках уже шла речь в п. 21.5. Как и там, мы называем здесь многогранником многогранную поверхность — фигуру, составленную из многоугольников, а разверткой — совокупность многоугольников с указанием правила их склеивания по сторонам.

Вопрос, который мы здесь рассмотрим, состоит в следующем: при каких условиях из данной развертки можно склеить замкнутый выпуклый многогранник?

Уточним сначала введенные понятия.

Замкнутым выпуклым многогранником называется фигура, образованная конечным числом многоугольников так, что, во-первых, каждая сторона каждого из многоугольников является одновременно стороной другого многоугольника и, во-вторых, вся фигура располагается по одну сторону от плоскости каждого из многоугольников.

Первое условие — это условие замкнутости, второе — условие выпуклости.

Разверткой мы называем совокупность конечного числа многоугольников с указанным **правилом склеивания** их сторон или отрезков сторон. При этом склеивание двух отрезков означает установление между их точками соответствия, сохраняющего расстояния (соответствующие части отрезков имеют равные длины), и сопоставляемые точки считаются за одну точку развертки, т. е. в этом смысле отождествляются.

Правило склеивания состоит в следующем:

1) некоторые стороны многоугольников разделены на отрезки, которые объявлены сторонами, а их концы — вершинами (как, например, на крестообразной развертке куба; конечно, таких условных сторон и вершин может не быть);

2) каждая сторона склеивается самое большее с одной стороной другого или того же самого многоугольника;

3) от каждого многоугольника можно перейти к любому другому, переходя последовательно от одного многоугольника к другому через их склеенные стороны.

Стороны многоугольников называются **ребрами развертки** при условии, что склеенные стороны считаются за одно ребро. Стороны, не склеенные с другими, образуют край развертки.

Вершины многоугольников называются **вершинами развертки** при условии, что отождествленные вершины многоугольников считаются за одну вершину развертки. Отождествление вершин происходит при склеивании сторон, поскольку вершины принадлежат сторонам в качестве концов. Поэтому вершины многоугольников могут представлять одну вершину развертки и тогда, когда у многоугольников нет склеиваемых сторон, но вершины отождествляются через несколько склеиваемых сторон других многоугольников или того же многоугольника. Например, на рисунке 15, *г* все вершины представляют одну вершину развертки.

Для того чтобы из развертки можно было склеить замкнутый выпуклый многогранник, должны выполняться следующие три необходимые условия.

1. Условие замкнутости: развертка не должна иметь края, т. е. каждая сторона каждого многоугольника склеивается с какой-либо стороной.

2. «Условие Эйлера»: если развертка состоит из f простых многоугольников, имеет k ребер и e вершин, то они должны быть связаны равенством $e-k+f=2$.

Всякий непростой многоугольник можно разрезать на простые. Поэтому если заранее заданная развертка содержит и непростые многоугольники, то их можно разрезать на простые и так получить развертку из простых многоугольников.

3. Условие выпуклости: сумма углов многоугольников, сходящихся в одной вершине, не больше 360° ни для одной вершины.

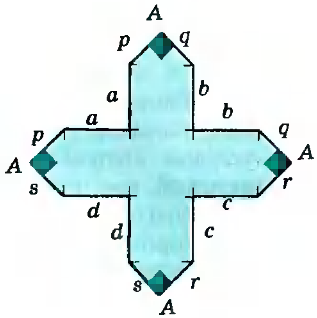


Рис. 71

То, что у всякого выпуклого многогранника сумма углов при каждой вершине меньше 360°, доказано в п. 33.3. В развертке сумма углов, сходящихся в одной вершине, может равняться 360°, и тогда такая вершина развертки не будет вершиной склеенного из развертки многогранника (пример дает вершина A развертки куба на рисунке 71).

Оказывается, перечисленные три условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы из развертки склеивался замкнутый выпуклый многогранник, однако с одним существенным исключением.

А именно, представим себе два равных выпуклых многоугольника и пусть у них подлежат склеиванию (отображены друг на друга) соответственно равные стороны. Они образуют развертку со всеми необходимыми условиями 1—3. Но из нее склеивается не многогранник (в обычном смысле), а дважды покрытый многоугольник.

С учетом этого особого случая (а других нет) выполняется следующая теорема А. Д. Александрова.

Теорема

Из всякой развертки с условиями 1—3 склеивается замкнутый выпуклый многогранник или дважды покрытый многоугольник и притом единственный с точностью до положения в пространстве.

Утверждение о единственности означает, что многогранники, склеенные из одинаковых разверток, равны.

Утверждение, что из какой-либо данной развертки склеивается многогранник, представляется наглядно понятным, но оно — не математическое.

Что, собственно говоря, означает, что некоторый многогранник P склеен из данной развертки R? Это можно определить следующим образом.

Многогранник P склеен из развертки R, если его грани и многоугольники развертки можно разбить на равное число многоугольников и сопоставить эти многоугольники и их стороны так, что будут выполнены следующие условия:

1) сопоставляемые многоугольники равны;

2) сопоставляемые стороны равны;

3) многоугольникам на многограннике, имеющим общую сторону, соответствуют многоугольники в развертке, имеющие соответствующую общую сторону, и обратно, многоугольникам в развертке, имеющим общую сторону, соответствуют на многограннике многоугольники с общей стороной.

При склеивании многогранника многоугольники развертки «переламываются» по сторонам тех многоугольников, которые должны лежать на разных гранях. Рассмотрим такие примеры. Если два квадрата развертки куба, соответствующие противоположным граням, заменить равными ромбами, то возможны два случая, изображенные на рисунках 72, *а* и *б*.

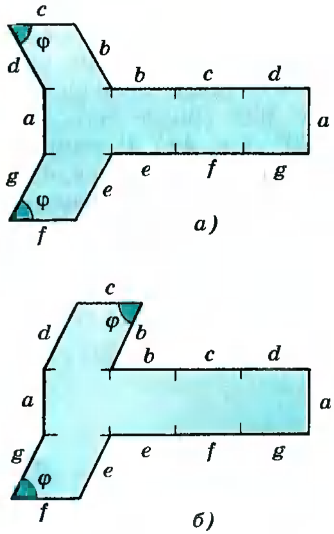


Рис. 72

В первом случае из развертки склеивается прямая призма с ромбом в основании. Во втором — многоугольники развертки после склеивания должны «переломиться». Подумайте, как это произойдет.

Обдумайте также, что получится, когда ромбы вырождаются в дважды покрытый отрезок, т. е. когда угол φ стремится к нулю.

Замечание 1. Утверждение единственности, содержащееся в сформулированной выше теореме, было доказано для разверток, состоящих из граней многогранника, французским математиком О. Коши в 1813 г. и формулируется следующим образом.

Теорема *(Коши)*

Два замкнутых выпуклых многогранника, одинаково составленные из соответственно равных граней, равны.

Легко видеть на примерах (рис. 73), что если отказаться от требования выпуклости, то утверждение теоремы не будет справедливым.

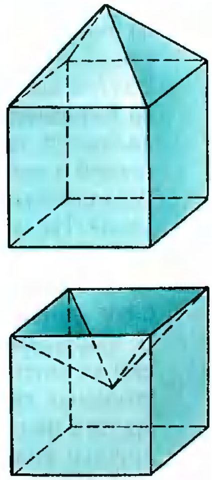


Рис. 73

Замечание 2. Замкнутый выпуклый многогранник можно определить как поверхность телесного выпуклого многогранника. То, что эта поверхность есть замкнутый выпуклый многогранник, очевидно из свойств телесного выпуклого многогранника. Верно и обратное: замкнутый выпуклый многогранник P ограничивает телесный выпуклый многогранник. Этот телесный многогранник получается как пересечение полупространств, содержащих P. Докажите самостоятельно.

Замечание 3. Условие Эйлера для развертки можно заменить следующим: сумма недостатков суммы углов до 360° во всех вершинах развертки должна быть больше 360° (более того, в этом случае она будет равна 720°, т. е. 4π). В этом условии, в отличие от условия Эйлера, не требуется, чтобы многоугольники развертки были простыми. Почему это можно сделать, сказано в п. 33.3.

Вообще же, несмотря на кажущуюся элементарность, вопрос о реализации из разверток многогранников относится к трудным разделам современной геометрии.

Задачи

Рисуем

25.1. Можете ли вы нарисовать выпуклый многогранник, у которого гранями являются: а) треугольники (но не тетраэдр); б) четырехугольники (но не призма)? Сколько у него вершин и граней, если ребер 12; 15?

25.2. Нарисуйте многогранник, у которого $e-k+f \neq 2$.

Исследуем

25.3. Дан выпуклый многогранник. К одной из его граней пристраивается пирамида. Она имеет в пересечении с данным многогранником только эту грань, которая является ее основанием. В результате такого пристраивания получается новый многогранник. Как изменяется (в самом общем случае) число вершин, граней и ребер у построенного многогранника по сравнению с исходным? Выполняется ли для построенного многогранника формула из теоремы Эйлера? Какие возможны частные случаи при таком построении?

25.4. Внутри выпуклого многогранника взяли точку и разбили этот многогранник на пирамиды, вершины которых находятся в данной точке, а основаниями являются грани данного многогранника. Как изменяется число вершин, граней и ребер многогранника, если из него удалить одну из таких пирамид? Выполняется ли для оставшегося многогранника формула из теоремы Эйлера? Не возникает ли у вас идея еще одного доказательства теоремы Эйлера?

25.5. Существует ли выпуклый многогранник, у которого в каждой грани больше пяти сторон?

25.6. В выпуклом 300-граннике все грани — пятиугольники, шестиугольники или семиугольники. В каждой вершине сходятся ровно три грани. Пятиугольных граней 100. Можете ли вы вычислить, сколько у него граней другого вида? Сможете ли вы решить задачу, если начнете подсчет с граней другого вида?

25.7. Для выпуклого многогранника попытайтесь оценить сверху и снизу такие отношения: $e:f$, $e:k$, $f:k$. Считая число вершин известным, исходя из полученных границ, найдите наибольшее значение для числа ребер; для числа граней. Постройте соответствующие многогранники. Решите аналогичные задачи, считая известным число ребер; число граней.

Участвуем в олимпиаде

25.8. Докажите, что выпуклый многогранник имеет или треугольную грань, или вершину, из которой выходят три ребра. Верно ли это утверждение для невыпуклых многогранников?

§ 26. Правильные и полуправильные многогранники

26.1. Правильные фигуры

Эпитет «правильный» для различных фигур мы употребляли не раз: правильный многоугольник, правильная пирамида, правильная призма. «Правильность» фигуры можно понимать, во-первых, как равенство друг другу ее однородных элементов и, во-вторых, как ее максимальную симметричность среди всех аналогичных фигур (т. е. максимальное число ее самосовмещений посредством движений).

Например, с одной стороны, правильным называют многоугольник, у которого равны друг другу все его стороны, а также равны друг другу все его углы.

С другой стороны, n-угольник, имеющий максимальное, т. е. равное n, число осей симметрии, имеет равные друг другу стороны и равные друг другу углы, т. е. является правильным и в первом смысле.

И о правильных многогранниках можно говорить в двух указанных смыслах. В этом параграфе мы рассмотрим сначала первый из указанных подходов к понятию «правильный многогранник», а о втором подходе будет сказано в п. 26.4. Кроме того, в этом параграфе мы рассмотрим многогранники, обладающие «правильностью» лишь относительно некоторых из элементов.

26.2. Правильные многогранники

Поскольку правильность фигуры — это равенство ее однородных элементов, то естественно назвать многогранник правильным, если равны друг другу все его ребра, все углы его граней и все двугранные углы между соседними гранями.

Равенство всех ребер правильного многогранника ведет к равенству сторон в каждой его грани. Вместе с равенством углов в гранях это позволяет сделать вывод о том, что каждая грань правильного многогранника является правильным многоугольником и что все эти грани равны друг другу.

Чаще всего **правильным многогранником** и называют такой многогранник, у которого все грани — это равные друг другу правильные многоугольники, а также равные друг другу углы между соседними гранями.

Существует всего пять типов правильных многогранников (рис. 74). Построением этих многогранников Евклид заканчивал свои «Начала». Вот последняя фраза этого сочинения: «Итак, кроме упомянутых пяти тел нельзя построить другой телесной фигуры, заключенной между равносторонними и равноугольными фигурами, что и требовалось доказать».

В Древней Греции пяти правильным многогранникам придавали особый мистический смысл, называли их **платоновыми телами.** Согласно Платону, атомы четырех основных элементов, из которых строится мир, имеют форму правильных многогранников. Огню со-

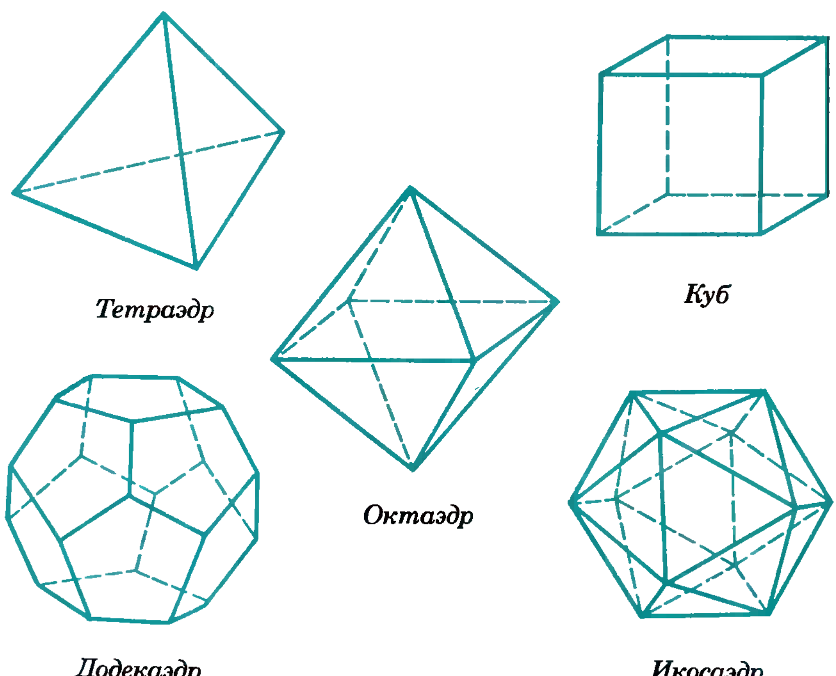


Рис. 74

ответствует тетраэдр, земле — куб, воздуху — октаэдр, воде — икосаэдр, а вся Вселенная, согласно Платону, имеет вид додекаэдра. Как пошутил значительно позднее один английский ученый: «Евклид вовсе и не собирался выпускать систематический учебник геометрии. Он задался целью написать сочинение о правильных многогранниках, рассчитанное на начинающих, в силу чего ему пришлось изложить все необходимые сведения».

Что кроме пяти платоновых тел нет других правильных многогранников, Евклид доказывал так. Из равенства друг другу двугранных углов при ребрах правильного многогранника следует, что такой многогранник выпуклый. Поэтому сумма плоских углов всех граней, сходящихся в одной вершине, меньше 360°. Следовательно, в одной вершине правильного многогранника могут сходиться три, четыре или пять правильных треугольников, три квадрата или три правильных пятиугольника. Эти пять возможностей и соответствуют тетраэдру, октаэдру, икосаэдру, кубу и додекаэдру. А вот правильные шестиугольники не могут быть гранями правильного многогранника, так как $3 \cdot 120° = 360°$.

Но оказывается, что возможность существования лишь пяти типов правильных многогранников имеет топологическую природу. А именно, сеть ребер многогранника, у которого одинаковое для всех граней число ребер и одинаковое для всех вершин число сходящихся в ней ребер, может быть лишь таким, как у платоновых тел. Такие сети ребер мы будем называть **правильными.** Например, правильной является сеть ребер любого тетраэдра и любого параллелепипеда.

Доказать, что существует лишь пять типов правильных сетей ребер у выпуклых многогранников, нам поможет теорема Эйлера.

Теорема *(о правильных сетях)*

Существует пять и только пять правильных сетей, для которых выполняется равенство Эйлера

$$e-k+f=2.$$

Эти сети такого же строения, как сети ребер правильных многогранников.

Доказательство. Правильную сеть, в которой из каждой вершины исходит m ребер и каждая грань имеет n ребер, будем называть сетью типа (m, n). Очевидно, m и n — натуральные числа, причем

$$m \geqslant 3, \quad n \geqslant 3. \qquad (26.1)$$

Возьмем правильную сеть типа (m, n). Пусть e — число ее вершин, k — число ее ребер, а f — число ее областей. Тогда по теореме Эйлера

$$e-k+f=2. \qquad (26.2)$$

Каждая область сети имеет n ребер, всего f областей, и каждое ребро принадлежит двум областям. Поэтому

$$nf=2k. \qquad (26.3)$$

Аналогично из каждой вершины сети исходит m ребер, всего вершин e, и каждое ребро соединяет две вершины. Поэтому

$$me=2k. \qquad (26.4)$$

Выразив f и e из (26.3) и (26.4) и подставив их в (26.2), получим:

$$\frac{2k}{m}-k+\frac{2k}{n}=2. \qquad (26.5)$$

Поэтому

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{k}>\frac{1}{2}. \qquad (26.6)$$

Учитывая, что $m \geqslant 3$ и $n \geqslant 3$, находим, что неравенству (26.6) удовлетворяют лишь пять следующих пар натуральных чисел (m, n):

1) (3, 3); 2) (3, 4); 3) (4, 3); 4) (3, 5); 5) (5, 3).

Они соответствуют пяти типам правильных многогранников.

Окончательные результаты, в которых даны также числа вершин, ребер и граней правильных многогранников, найденные из равенств (26.5), (26,4), (26.3), приведены в таблице:

Тип многогранника	Число ребер при вершине	Число сторон грани	Число граней	Число ребер	Число вершин
Тетраэдр	3	3	4	6	4
Куб (гексаэдр)	3	4	6	12	8
Октаэдр	4	3	8	12	6
Додекаэдр	3	5	12	30	20
Икосаэдр	5	3	20	30	12

26.3. Построение правильных многогранников. Двойственность правильных многогранников

Чтобы доказать существование всех типов правильных многогранников, укажем, как строятся эти многогранники. В построении правильного тетраэдра, куба и правильного октаэдра трудностей не возникает. Построить икосаэдр и додекаэдр сложнее. Интересно, что все типы правильных многогранников можно построить, взяв за основу самый простой из них — куб. Как из куба получить тетраэдр и октаэдр, ясно из рисунка 75.

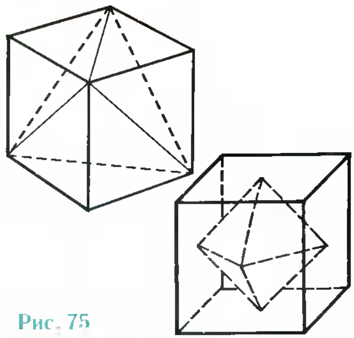


Рис. 75

Как построить вписанный в куб икосаэдр, расположив 12 вершин икосаэдра по 2 на каждой из 6 граней куба, вы узнаете, ознакомившись с решением задачи 26.1 (рис. 106).

Наконец, укажем, как вокруг куба описать додекаэдр. Ребро куба будем считать равным единице. Возьмем 12 правильных пятиугольников с диагональю, равной единице, и каждый из них разрежем диагональю на равнобедренный треугольник и трапецию (рис. 76).

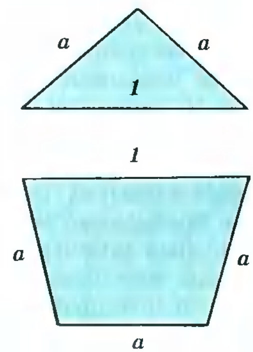


Рис. 76

Треугольник имеет боковые стороны, равные $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, а трапеция — стороны 1, a, a, a. Отметим, что $a^2+a=1$.

Теперь над каждой гранью куба построим «шатер» из двух трапеций и двух полученных треугольников (рис. 77). Пусть треугольник образует с гранью куба угол α, а трапеция — угол β. Если подсчитать тангенсы этих углов, то получим, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{a}$ и $\operatorname{tg}\beta=a$. Поэтому $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

Строить «шатры» над гранями куба будем так, чтобы к каждому ребру куба прилегали и треугольник, и трапеция (рис. 78). Так как $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, то треугольники вместе с трапециями составят 12 правильных пяти-

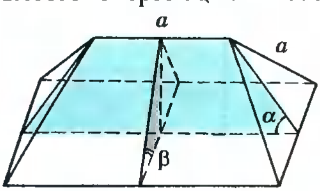


Рис. 77

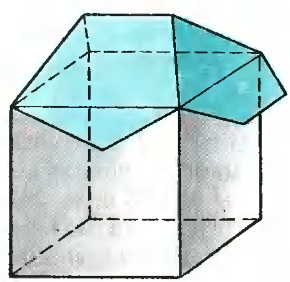
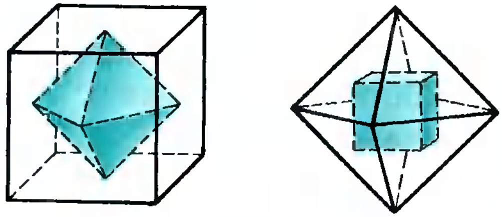
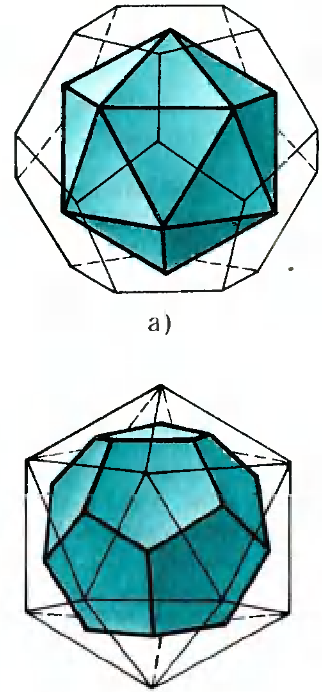


Рис. 78



а) Рис. 79 б)



а)

б)

Рис. 80

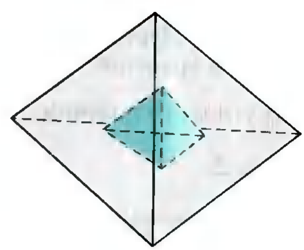


Рис. 81

угольников. Эти пятиугольники и будут гранями додекаэдра. Равенство друг другу всех двугранных углов построенного додекаэдра можно проверить, воспользовавшись теоремами косинуса и синуса для трехгранных углов.

При построении правильных многогранников можно использовать и их двойственность. Она состоит в следующем.

Ясно, что центры граней любого правильного многогранника P сами являются вершинами некоторого правильного многогранника P'. Число вершин нового многогранника P' равно числу граней исходного многогранника P. А тогда из таблицы в п. 26.2 следует, что и число граней нового многогранника P' равно числу вершин исходного многогранника P. Число же ребер у P и P' одно и то же.

Если теперь повторить это построение для многогранника P', т. е. построить многогранник P'' с вершинами в центрах граней многогранника P', то получим опять правильный многогранник P'' того же типа, что и исходный многогранник P.

Типы многогранников P и P' называются **двойственными** друг другу (короче говорят, что многогранники P и P' двойственны друг другу).

Конкретное построение, а также таблица в п. 26.2 показывают, что двойственными друг другу будут куб и октаэдр (рис. 79), а также додекаэдр и икосаэдр (рис. 80). Тетраэдр же двойствен сам себе (рис. 81).

26.4. Симметрия правильных многогранников

В п. 26.2 мы определили правильный многогранник как многогранник, у которого равны друг другу все элементы одного вида: грани, ребра и т. д. Но правильные многогранники можно определить как самые симметричные из всех многогранников. Это означает следующее. Если мы возьмем на правильном многограннике некоторую вершину A, подходящее к ней ребро a и грань α, подходящую к этому ребру, и еще любой такой же набор A', a', α', то существует такое самосовмещение многогранника, которое вершину A переводит в вершину A', ребро a — в ребро a', грань α — в грань α'.

Докажем это. Так как любые две грани правильного многогранника равны, то существует движение, которое одну из них переведет в другую. Поскольку все двугранные углы этого многогранника равны, то в результате совмещения граней весь многогранник самосовместится или перейдет в многогранник, симметричный исходному относительно плоскости второй грани. Во втором случае симметрия относительно плоскости этой грани завершит процесс самосовмещения правильного многогранника.

Верно и обратное: многогранники, обладающие этим свойством, будут правильными, так как у них окажутся равны все ребра, все плоские углы и все двугранные углы.

Рассмотрим теперь элементы симметрии правильных многогранников.

Начнем с элементов симметрии куба.

1. Центр симметрии — центр куба.

2. Плоскости симметрии (рис. 82): 1) три плоскости симметрии, перпендикулярные ребрам в их серединах; 2) шесть плоскостей симметрии, проходящих через противоположные ребра.

3. Оси симметрии: 1) три оси поворотной симметрии 4-го порядка, проходящие через центры противоположных граней (рис. 83, *а*); 2) шесть осей поворотной симметрии 2-го порядка, проходящих через середины противоположных ребер (рис. 83, *б*); 3) четыре оси поворотной симметрии 3-го порядка, содержащие диагонали куба (рис. 83, *в*). Эти последние из названных осей являются также осями зеркального поворота 6-го порядка. Это означает следующее. Сечение

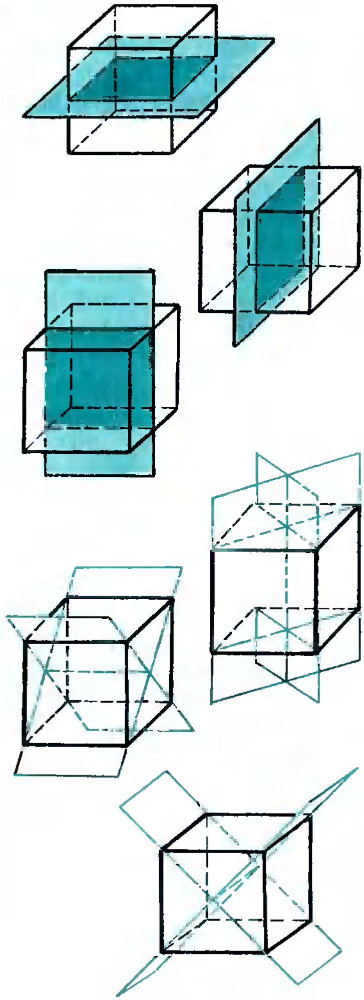


Рис. 82

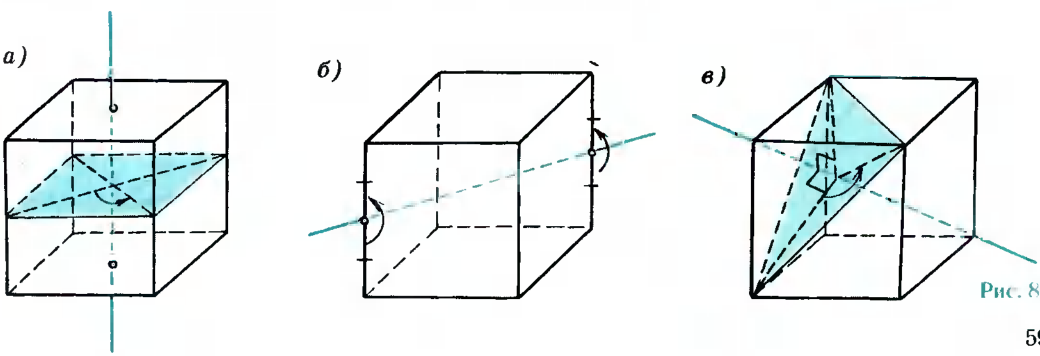


Рис. 83

куба плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно диагонали, представляет собой правильный шестиугольник (рис. 84). При повороте куба вокруг диагонали на угол 60° шестиугольник отображается на себя, а куб в целом еще нужно отразить в плоскости шестиугольника. Композицию поворота и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота, и называют **зеркальным поворотом.**

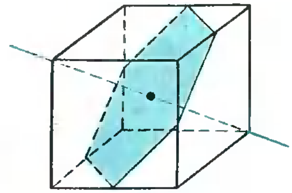


Рис. 84

Октаэдр двойствен кубу, и потому у него те же элементы симметрии с той лишь разницей, что плоскости симметрии и оси, проходящие у куба через вершины и центры граней, у октаэдра проходят наоборот: через центры граней и вершины. Так, зеркальная ось 6-го порядка проходит у октаэдра через центры противоположных граней (рис. 85). Обратимся к элементам симметрии правильного тетраэдра.

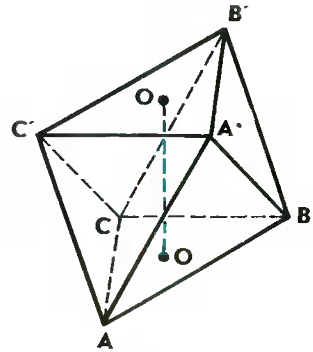


Рис. 85

1. Шесть плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через ребро и середину противоположного ребра (рис. 86, *а*).

2. Четыре оси 3-го порядка, проходящие через вершины и центры противоположных им граней, т. е. через высоты тетраэдра (рис. 86, *б*).

3. Три оси зеркального поворота 4-го порядка, проходящие через середины противоположных ребер (рис. 86, *в*).

Центра симметрии у тетраэдра нет.

В куб можно вписать два правильных тетраэдра (рис. 75). При самосовмещениях куба эти тетраэдры либо самосовмещаются, либо отображаются друг на друга. Выясните, при каких самосовмещениях куба происходит самосовмещение тетраэдров, а при каких они отображаются друг на друга. Убедитесь, что в первом случае получатся все самосовмещения тетраэдра, так что группа симметрии куба включает в себя группу симметрии куба как подгруппу.

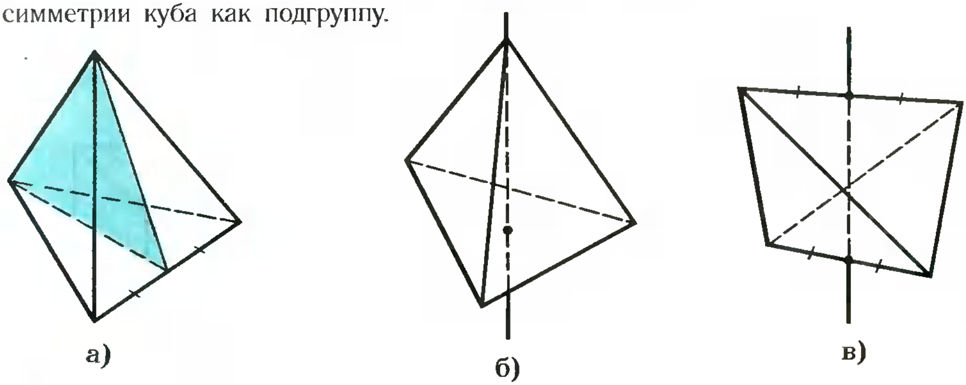


Рис. 86

Группы симметрий у додекаэдра и икосаэдра одинаковы, поскольку эти правильные многогранники двойственны друг другу. У них есть центр симметрии, плоскости симметрии, оси поворотной симметрии и оси зеркальной поворотной симметрии. Труднее всего найти последние из этих элементов симметрии. Укажем, как их построить.

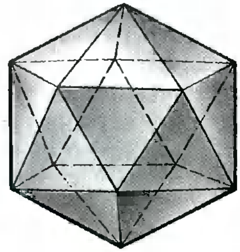


Рис. 87

Оси зеркальной поворотной симметрии в икосаэдре (как и в кубе) соединяют противоположные вершины этого многогранника (рис. 87), а в додекаэдре (как и в октаэдре) эти оси идут через центры их параллельных граней (рис. 88). Плоскости, проходящие через центры правильных многогранников и перпендикулярные указанным осям, пересекают правильные многогранники по правильным многоугольникам (рис. 89). В частности, додекаэдр и икосаэдр они пересекают по правильным десятиугольникам (рис. 89, *г, д*). Из сказанного следует, что икосаэдр и додекаэдр самосовмещаются зеркальными поворотами относительно осей 10-го порядка.

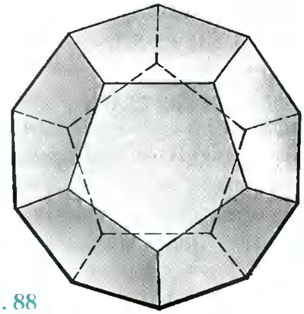
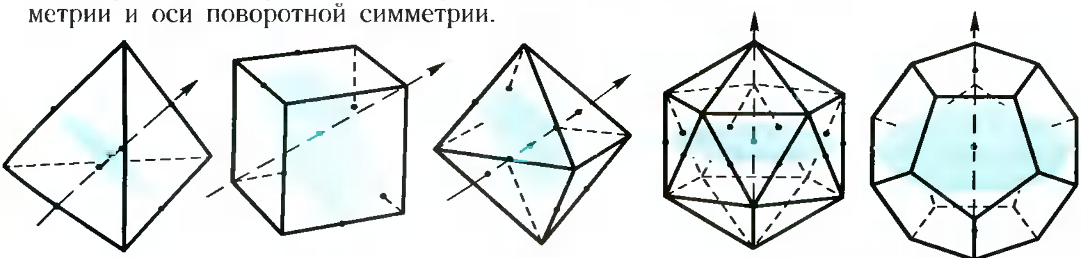


Рис. 88

Найдите самостоятельно более простые элементы симметрии икосаэдра и додекаэдра — плоскости симметрии и оси поворотной симметрии.



а) б) в) г) д)

Рис. 89

26.5. Многогранные углы. Правильные многогранные углы

Мы уже знакомы с двугранными и трехгранными углами. Многогранный угол можно получить, продолжая ребра и грани, идущие из одной вершины какого-либо многогранника, например из вершины пирамиды (рис. 90). Многогранные углы составляются из обычных углов (такие углы мы будем теперь называть плоскими углами), подобно тому как замкнутая ломаная составляется из отрезков. А именно дается следующее определение.

Многогранным углом называется фигура, образованная плоскими углами так, что выполняются условия:

1) никакие два угла не имеют общих точек, кроме их общей вершины или целой стороны;

2) у каждого из этих углов каждая его сторона является общей с одним и только одним другим таким углом;

3) от каждого угла к каждому можно перейти по углам, имеющим общие стороны;

4) никакие два угла с общей стороной не лежат в одной плоскости.

Плоские углы, образующие многогранный угол, называются его **гранями**, а их стороны — его **ребрами**. Элементами многогранного угла являются величины его плоских углов — граней, а также величины двугранных углов при его ребрах между гранями, прилегающими к этим ребрам.

Многогранные углы называются **равными**, если равны друг другу все их соответственные элементы.

Трехгранные углы мы рассматривали в дополнении к § 14. Под данное определение многогранного угла подходит и двугранный угол. Он составлен из двух развернутых плоских углов. Вершиной такого угла может считаться любая точка на его ребре, и эта точка разбивает ребро на два ребра, сходящихся в вершине. Но ввиду этой неопределенности в положении вершины двугранный угол исключается из числа многогранных углов.

Рассмотрите многогранные углы у разных многогранников. Обратите внимание, что грани многогранных углов могут быть и не выпуклыми (рис. 91).

Многогранный угол называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Ясно, что многогранные углы при вершинах выпуклых многогранников выпуклые. Грани выпуклых многогранных углов выпуклы.

Подобно тому как каждый треугольник является выпуклым многоугольником (рис. 92, *а*), любой трехгранный угол с выпуклыми гранями является выпуклым многогранным углом (рис. 92, *б*). Но уже четырехгранные углы с выпуклыми гранями могут быть и не выпуклыми (рис. 93, *а*), подобно тому как четырехугольники могут быть и не выпуклыми (рис. 93, *б*).

Выпуклый многогранный угол называется **правильным**, если равны друг другу все плоские углы его граней и равны друг другу все двугранные углы при его ребрах.

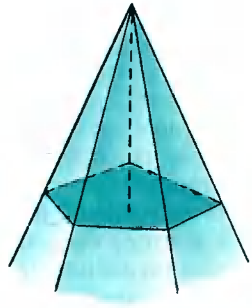


Рис. 90

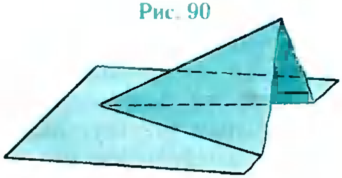
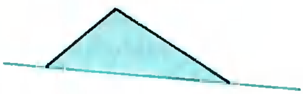
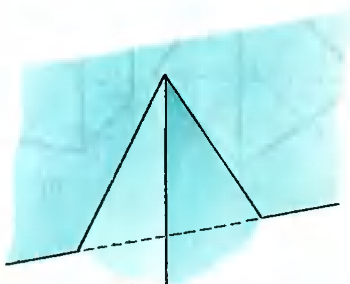


Рис. 91

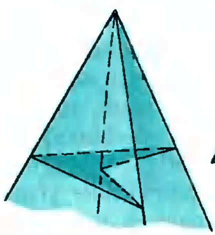


а)

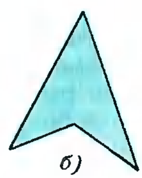


б)

Рис. 92



а)



б)

Рис. 93

Очевидно, правильным многогранным углом является угол при вершине правильной пирамиды (рис. 94), а также все многогранные углы при вершинах правильных многогранников.

Используя введенные понятия, мы можем теперь определить правильный многогранник следующим образом:

Многогранник называется правильным, если все его грани — равные друг другу правильные многоугольники, а все многогранные углы при вершинах — равные друг другу правильные многогранные углы.

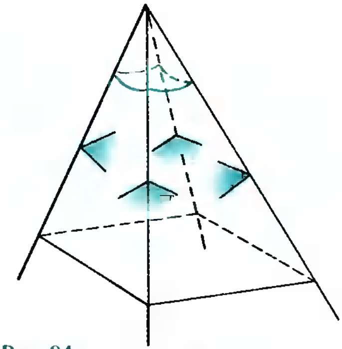


Рис. 94

26.6. Полуправильные многогранники и правильные звездчатые многогранники

У правильного многогранника должны быть правильными и равными друг другу и грани, и многогранные углы. Если ослабить одно из этих условий, то получим два класса **полуправильных многогранников.**

Первый из этих классов называют **равноугольными полуправильными многогранниками.** Этот класс состоит из таких многогранников, у которых, во-первых, все грани являются правильными многоугольниками (но необязательно равными друг другу) и, во-вторых, многогранные углы при всех вершиннах равны.

Этот класс, во-первых, содержит все правильные призмы, боковые грани которых — квадраты (рис. 95).

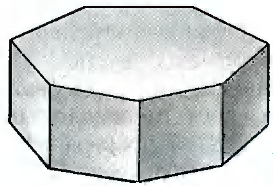


Рис. 95

Ясно, что среди любых n-угольных правильных призм встречаются такие призмы с квадратными боковыми гранями.

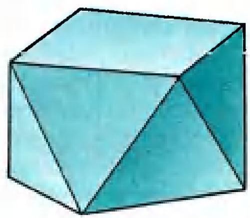


Рис. 96

Кроме правильных призм, в класс равноугольных полуправильных многогранников входят **правильные антипризмы**, у которых боковые грани — правильные треугольники (рис. 96).

Строят правильные антипризмы так.

Сначала берут любой правильный n-угольник Q_1. Через его центр O_1 проводят прямую l, перпендикулярную плоскости α_1, в которой лежит Q_1 (рис. 97). Затем берут точку $O_2 \in l$ и через нее проводят плоскость $\alpha_2 \| \alpha_1$. В плоскости α_2 строят правильный n-угольник Q_2 с центром O_2, повернутый относительно Q_1 на угол $\varphi_n = \frac{180°}{n}$. Затем последовательно соединяют соседние

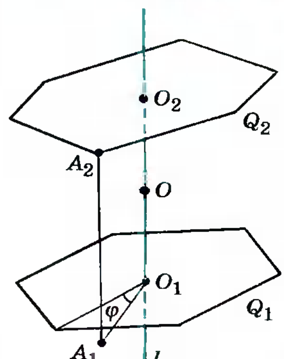


Рис. 97

вершины многоугольников Q_1 и Q_2 и получают $2n$ треугольников. Можно так выбрать длину отрезка O_1O_2, чтобы эти треугольники получились равносторонними. Эти $2n$ правильных треугольников и правильные многоугольники Q_1 и Q_2 ограничат полуправильный многогранник P, который называют n-угольной правильной антипризмой (рис. 98).

n-угольную антипризму можно самосовместить **зеркальным поворотом.** Этот зеркальный поворот состоит в последовательно выполненном повороте вокруг оси O_1O_2 на угол φ_n, а затем в зеркальной симметрии, переводящей друг в друга плоскости α_1 и α_2. Прямая O_1O_2 в этом случае называется осью зеркального поворота порядка $2n$.

Заметим, что, последовательно выполнив два зеркальных поворота на угол φ_n, получим обычный поворот на угол $2\varphi_n$.

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных равноугольных многогранников, существует еще лишь 14 видов полуправильных равноугольных многогранников.

Тринадцать из них были известны еще Архимеду, и их называют **архимедовыми телами** (см. с. 65). Четырнадцатый многогранник был найден в 1957 г. московским математиком В. Г. Ашкинузе. Этот многогранник (рис. 99) отличается от архимедова многогранника, изображенного на рисунке *к*.

Других равноугольных полуправильных многогранников нет. Доказать это можно, опираясь на теорему Эйлера, по той же схеме, как это было сделано при классификации правильных многогранников в п. 26.2. Но перебор возможностей здесь значительно длиннее. Эти выводы можно найти в IV томе Энциклопедии элементарной математики (М.: Физматгиз, 1963).

Второй класс полуправильных многогранников называют **равногранными.** Этот класс содержит многогранники, у которых, во-первых, все грани равны и, во-вторых, все многогранные углы при вершинах правильные. Можно сказать, что в этот класс входят многогранники, двойственные полуправильным равноугольным многогранникам. Например, правильным призмам двойственны двойные пирамиды (рис. 100), а антипризмам — многогранники, изображенные на рисунке 101.

И для каждого архимедова тела среди этих многогранников имеется двойственный. Одна из таких пар изображена на рисунках 102 и 103.

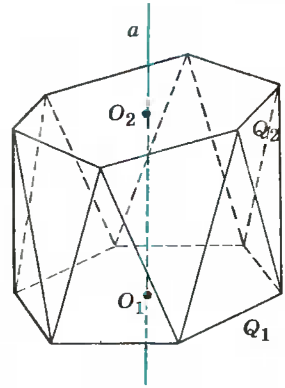


Рис. 98

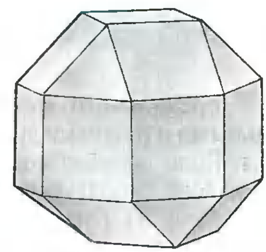


Рис. 99

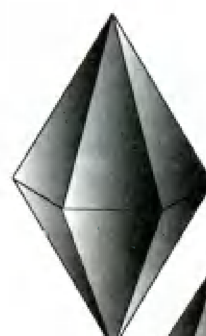


Рис. 100

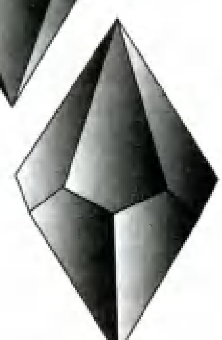
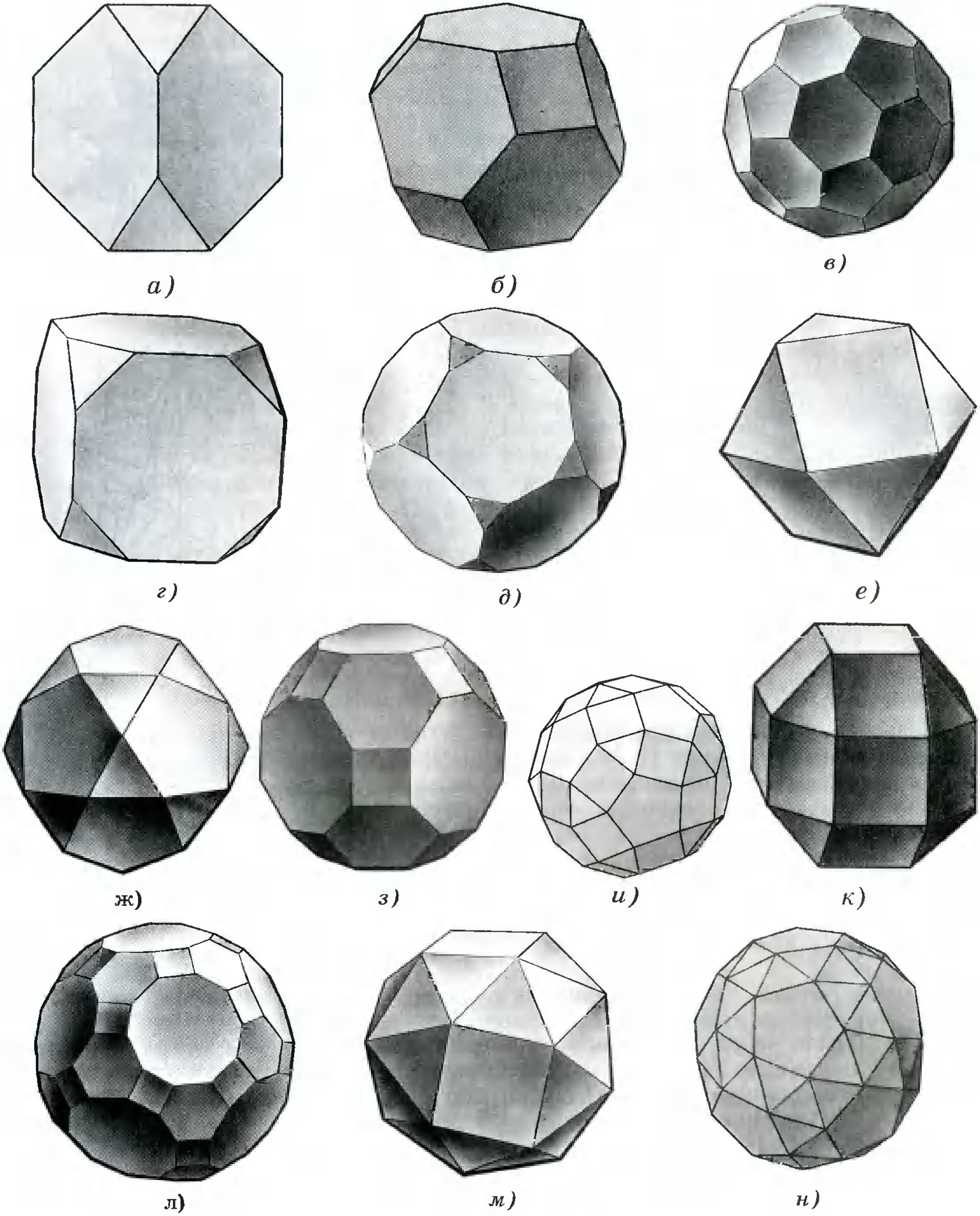


Рис. 101



«Архимедовы тела»

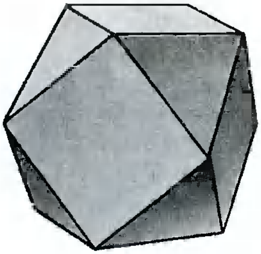


Рис. 102

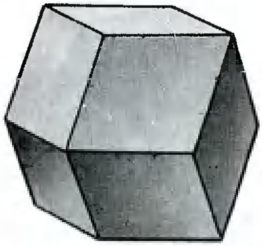
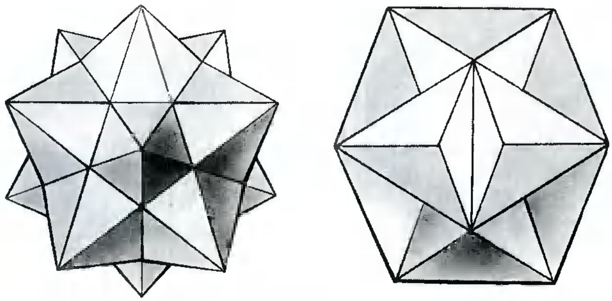
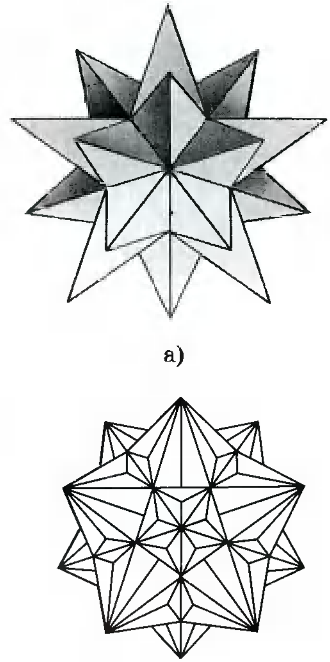


Рис. 103



а) б)

Рис. 104



а) б)

Рис. 105

Подробно об этих многогранниках можно прочитать в уже упоминавшейся книге И. М. Смирновой «В мире многогранников» (М.: Просвещение, 1995). Там же рассказано о правильных звездчатых многогранниках. Их всего четыре типа: два из них открыты в XVII в. И. Кеплером (рис. 104), а два других — спустя два века французским математиком Луи Пуансо (рис. 105).

Задачи

Разбираемся в решении

26.1.(3). Пусть ребро правильного многогранника известно. Как найти: а) радиус описанной сферы; б) радиус вписанной сферы; в) двугранный угол между его соседними гранями? Пусть ребро равно 1. Вычислите эти величины.

Решение

Сложнее всего найти эти величины для икосаэдра и додекаэдра. Так как эти многогранники двойственны друг другу, то, решив задачу для одного из них, легко получим ее решение и для другого. Так как правильный додекаэдр строился как двойственный правильному икосаэдру, то естест-

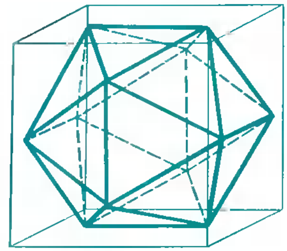


Рис. 106

венно начать отыскание этих величин для правильного икосаэдра. А для того чтобы найти эти величины в правильном икосаэдре, надо его сначала построить. Его построение указано в теоретическом тексте параграфа. Основываясь на нем, можно получить все нужные ответы. Но мы будем исходить из другого построения правильного икосаэдра. Это построение интересно само по себе. Кроме того, оно связывает правильный икосаэдр с кубом. Связь с кубом позволяет решить задачу быстрее. Оказывается, все вершины правильного икосаэдра можно расположить на поверхности куба. На каждой грани куба лежат по две соседние вершины икосаэдра. Положение некоторых из этих вершин указано на рисунке 106. Искомые величины в икосаэдре могут быть теперь найдены как некоторые величины в кубе.

Пусть ребро куба равно 1. Вычислим ребро правильного икосаэдра. Обозначим его длину через d, расстояние от его вершины до ближайшего ребра куба через x. Получаем первое уравнение: $d+2x=1$ (?). Несложно получить еще одно уравнение (?):

$$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2. \qquad (?)$$

Решая систему этих уравнений и учитывая, что $x<1$, получим $d=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Теперь можно убедиться, что многогранник, расположенный в кубе с ребром 1, как указано на рисунке 106, ребро которого $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, является правильным икосаэдром (?). Центр этого икосаэдра и центр куба совпадают (?). Все искомые величины могут быть вычислены из планиметрических соотношений (?).

Дополняем теорию

26.2.(3). Докажите, что в правильном многограннике есть точка, равноудаленная от всех его: а) вершин; б) граней; в) ребер. Докажите, что это одна и та же точка. (Эту точку естественно назвать центром правильного многогранника.)

26.3.(5). Докажите, что сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°. Верен ли этот результат для невыпуклого многогранного угла?

Планируем

26.4.(3). Как найти двугранные углы в правильном многограннике?

26.5.(3). Как найти вершины правильного: а) тетраэдра на поверхности куба; б) октаэдра на поверхности куба; в) октаэдра на поверхности правильного тетраэдра; г) октаэдра на поверхности правильного икосаэдра; д) куба на поверхности правильного додекаэдра; е) икосаэдра на поверхности куба?

26.6.(3). Пусть дан правильный икосаэдр. а) Зафиксируйте два каких-либо его ребра. Как найти угол между ними? б) Зафиксируйте какие-либо его ребра и грань. Как найти угол между ними? в) Зафиксируйте две какие-либо его грани. Как найти угол между ними? Решите аналогичные задачи для правильного додекаэдра.

Доказываем

26.7.(5). Докажите, что существует плоскость, которая пересекает все ребра выпуклого многогранного угла. Верно ли это утверждение для невыпуклых многогранных углов?

26.8.(5). Дан выпуклый четырехгранный угол. Докажите, что в его сечении можно получить параллелограмм.

26.9.(5). В выпуклом четырехгранном угле плоские углы равны. Докажите, что плоскости, проходящие через его противоположные ребра, взаимно перпендикулярны. Верно ли обратное?

Исследуем

26.10.(3). Есть ли в правильном тетраэдре такая точка, из которой все ребра одной грани видны под прямым углом?

26.11.(3). Является ли правильным тетраэдром правильная треугольная пирамида, в которой: а) равны периметры всех граней; б) равны площади всех граней; в) равны все высоты; г) все высоты пересекаются в одной точке; д) совпадают центры вписанной и описанной сфер; е) существует сечение, являющееся квадратом; ж) развертка образует треугольник; з) угол между каждым ребром и гранью один и тот же; и) все двугранные углы равны?

26.12.(3). Является ли кубом прямоугольный параллелепипед, у которого: а) равны диагонали граней, выходящие из одной вершины; б) диагональ составляет одинаковые углы с гранями; в) одна из теней при освещении параллельным пучком света на плоскости, перпендикулярной этому пучку, является правильным шестиугольником?

26.13.(3). Можно ли отказаться в определении правильного многогранника от каких-либо из условий?

26.14.(3). Существует ли такой невыпуклый многогранник, у которого: а) все грани — равные правильные многоугольники; б) все двугранные углы равны?

26.15.(3). Является ли правильным тетраэдром тетраэдр, в котором выполнены условия: а) — и) из задачи 26.11? Возьмите сами два каких-либо из этих условий и ответьте на тот же вопрос. Возьмите сами какое-либо свойство правильного тетраэдра, не входящее в перечень, из задачи 26.11 и установите, будет ли это свойство характерным для правильного тетраэдра, т. е. выделять его из правильных треугольных пирамид; из тетраэдров.

26.16.(3). Составьте самостоятельно задачи про куб, аналогичные задачам 26.11, 26.15.

26.17.(3). Центр правильного многогранника спроектировали на все его грани (ребра). Являются ли полученные точки вершинами правильного многогранника?

26.18.(5). Из одной точки P проводятся лучи PA_1, PA_2, ..., PA_n. При этом: а) все углы между проведенными лучами равны; б) все углы между проведенными лучами тупые. Сколько таких лучей можно провести?

26.19.(5). а) Известны плоские углы выпуклого четырехгранного угла. Можно ли найти его двугранные углы? б) Решите обратную задачу. в) Сколько плоских и двугранных углов достаточно знать, чтобы построить выпуклый четырехгранный угол? г) Будет ли этого достаточно для построения четырехгранного угла без условия его выпуклости?

26.20.(5). Известны все плоские и двугранные углы выпуклого четырехгранного угла с вершиной P. На его ребрах взяты точки A, B, C. Известны PA, PB, PC. Плоскость ABC пересекает четвертое ребро этого угла в точке D. Сможете ли вы найти PD?

26.21.(5). Оцените сверху и снизу сумму двугранных углов выпуклого четырехгранного угла.

26.22.(5). Дан выпуклый четырехгранный угол. При каком условии: а) около него можно описать коническую поверхность; б) в него можно вписать коническую поверхность; в) в него можно вписать сферу? Ответьте на эти же вопросы для трехгранного угла; для многогранного угла.

26.23.(5). Два трехгранных угла имеют общую вершину. Как бы вы определили, что значит: один из них лежит внутри другого? Пусть теперь один из них лежит внутри другого. Сравните плоские и двугранные углы этих углов. Обобщаются ли полученные результаты на четырехгранные углы? на многогранные углы?

Прикладная геометрия

26.24.(3). Известно, что по форме некоторые вирусы являются правильными многогранниками. Это было установлено по их теням под электронным микроскопом. Как по тени определить вид правильного многогранника?

26.25.(3). Придумайте, как из бумажной цилиндрической трубки можно сделать правильный тетраэдр.

Задачи к главе V

Представляем

V.1. Через каждое ребро тетраэдра проводится плоскость, параллельная противоположному ребру. Какой многогранник ограничивают эти плоскости?

V.2. Через каждое ребро куба проводится плоскость, параллельная диагональной плоскости куба, параллельной данному ребру. Сколько вершин, ребер и граней в многограннике, ограниченном этими плоскостями?

Планируем

V.3. На грани правильного тетраэдра взяли точку. Как найти расстояние от нее до противоположной вершины тетраэдра, если можно делать измерения только на его поверхности? Можно ли решить эту задачу для произвольного тетраэдра?

V.4. Дана правильная n-угольная пирамида. Пусть φ_1 — плоский угол при вершине, φ_2 — угол между боковым ребром и основанием, φ_3 — угол между боковой гранью и основанием, φ_4 — угол между соседними боковыми гранями. Найдите зависимости между этими углами. Пусть один из этих углов известен. Найдите угол между: а) ребром основания и боковой гранью, к которой оно примыкает; б) ребром основания и другой фиксированной боковой гранью; в) ребром основания и фиксированным боковым ребром, скрещивающимся с данными; г) двумя фиксированными боковыми несмежными гранями.

V. 5. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной 1. На этом основании построены две пирамиды P_1ABCD и P_2ABCD, причем $(P_1B)\perp(ABC)$, $(P_2C)\perp(ABC)$, $|P_1B|=|P_2C|=1$, P_1 и P_2 находятся по одну сторону от основания. Рассмотрим сечение многогранника, являющегося объединением этих пирамид, плоскостью, параллельной основанию. Выразите его площадь как функцию от x, где x — расстояние от плоскости сечения до (ABC).

V.6. Пусть ABC — правильный треугольник со стороной 1. На этом основании построены две пирамиды P_1ABC и P_2ABC, причем $(P_1B)\perp(ABC)$, $(P_2C)\perp(ABC)$, $|P_1B|=|P_2C|=2$, P_1 и P_2 находятся по одну сторону от основания. Рассмотрим сечение многогранника, являющегося объединением этих пирамид, плоскостью, параллельной основанию. Выразите его площадь как функцию от x, где x — расстояние от плоскости сечения до P_1.

V.7. Найдите ребро куба, вписанного в такой многогранник с известными ребрами: а) правильный тетраэдр: б) прямоугольный тетраэдр с равными боковыми ребрами; в) правильную четырехугольную пирамиду с равными ребрами; г) правильную треугольную призму с равными ребрами.

V.8. В четырехугольную пирамиду с равными ребрами вписана другая такая же пирамида. Найдите отношение их ребер.

V.9. В правильной n-угольной пирамиде известна сторона основания и плоский угол при вершине. Найдите радиус описанной около нее сферы, радиус вписанной в нее сферы и расстояние между этими сферами. Решите такую же задачу для правильной n-угольной призмы с известными ребрами.

V.10. Дан шар радиусом R. Найдите ребро: а) вписанного в него куба; б) вписанной четырехугольной пирамиды с равными ребрами; в) вписанной треугольной призмы с равными ребрами. Найдите затем радиус шара, вписанного в эти многогранники.

V.11. В сферу радиусом R вписана: а) правильная n-угольная пирамида; б) правильная n-угольная призма. Известны их ребра. Найдите расстояние от центра данной сферы до вершин, ребер и граней этих многогранников.

V.12. В данном кубе расположены 9 равных шаров так, что центр одного из них находится в центре куба, а сам он касается 8 других шаров. Каждый из этих 8 шаров, кроме того, касается трех граней куба. Найдите радиус этих шаров.

Ищем границы

V.13. Через диагональ основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость. Вычислите наибольшее значение площади сечения призмы этой плоскостью, если: а) высота призмы равна 2, а длина диагонали основания 6; б) высота призмы равна 4, а длина диагонали основания 18. Попытайтесь решить задачу в общем случае.

V.14. На верхней грани куба с ребром 1 стоит правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны. Основание пирамиды совпадает с гранью куба, других общих точек они не имеют. Проводится сечение получившегося многогранника: а) параллельно передней грани куба; б) через ребро нижнего основания куба; в) параллельно одной из боковых граней пирамиды; г) через боковое ребро пирамиды. Сможете ли вы вычислить наибольшее значение площади такого сечения?

V.15. Внутри правильного тетраэдра лежат 4 равных шара без общих внутренних точек. Каждый из них касается трех граней тетраэдра. Каков наибольший радиус этих шаров, если ребро тетраэдра равно 1? Составьте аналогичные задачи для n-угольной пирамиды, правильной треугольной призмы, n-угольной призмы.

V.16. В данном кубе расположен цилиндр с известным радиусом основания. При этом его ось лежит на диагонали куба. Какова наибольшая длина образующей такого цилиндра?

V.17. В данном правильном тетраэдре расположен цилиндр с известным радиусом основания. При этом: а) основание цилиндра лежит на одной из граней; б) образующая цилиндра лежит на одной из граней; в) ось цилиндра перпендикулярна противоположным ребрам тетраэдра. Сможете ли вы найти наибольшую длину образующей такого цилиндра?

Доказываем

V.18. Имеются два выпуклых многогранника. Каждая точка одного из них соединена отрезками со всеми точками другого. Докажите, что середины этих отрезков образуют выпуклый многогранник.

Исследуем

V.19. Является ли треугольная пирамида правильной, если у нее равны углы: а) боковых ребер с основанием; б) боковых ребер с противоположными гранями; в) боковых граней с основанием; г) соседних боковых граней между собой; д) боковых ребер с противоположными ребрами основания? Возьмите также два условия из перечисленных и ответьте на тот же вопрос. Составьте аналогичные вопросы для n-угольной пирамиды.

V.20. Является ли треугольная пирамида правильной, если: а) около нее можно описать сферу; б) в нее можно вписать сферу; в) возможно и то и другое? Обобщите эту задачу для n-угольной пирамиды.

V.21. Для треугольной призмы сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное теореме косинусов для треугольника.

V.22. Какие (по числу сторон) многоугольники могут получиться в сечении правильной n-угольной: а) пирамиды; б) призмы?

V.23. В основании прямого параллелепипеда ромб с острым углом φ и стороной $2d$. Боковое ребро равно d. Можно ли в нем провести сечение, являющееся квадратом?

V.24. Через каждую вершину параллелепипеда проведена плоскость, параллельная плоскости, проходящей через три соседние с ней вершины. Какой многогранник получился в результате этого? Какими он будет обладать свойствами, если данный параллелепипед: а) прямоугольный; б) все его грани — равные ромбы; в) куб?

V.25. Одна треугольная пирамида находится внутри другой. Может ли сумма длин ребер внутренней пирамиды быть больше, чем сумма длин ребер внешней?

V.26. Определите, на сколько частей могут разделить пространство поверхности двух кубов.

V.27. Даны две сферы с общим центром и радиусами R_1 и R_2 ($R_1<R_2$). При каком условии существует прямоугольный параллелепипед, лежащий в большем шаре и содержащий меньший шар?

V.28. Полным углом многогранника в данной вершине называется сумма всех его плоских углов при этой вершине. Кривизной вершины многогранника называется разность между 2π и полным углом при этой вершине. Найдите сумму всех кривизн для произвольной n-угольной пирамиды, для произвольной n-угольной призмы, произвольной n-угольной усеченной пирамиды, каждого из правильных многогранников, произвольно взятого многогранника. Какое у вас возникает предположение?

V.29. Попытайтесь найти аналогию между треугольниками и трехгранными углами. Найдите для них аналогичные теоремы. Найдите теоремы, не имеющие аналогий.

Под исследованием многогранника будем понимать выяснение некоторых его свойств, необязательно всех из приводимого ниже списка. Укажем эти свойства: 1. Способ построения. 2. Выпуклость. 3. Выполнение теоремы Эйлера для невыпуклых многогранников. 4. Наличие среди его ребер и граней параллельных или перпендикулярных. 5. Построение одной из разверток. 6. Ортогональные проекции на три попарно перпендикулярные плоскости. 7. Форма его сечений. 8. Существование описанной сферы. 9. Существование вписанной сферы.

Считая длины ребер многогранника известными, рекомендуется вычислить: 1) диаметр; 2) расстояние между параллельными или скрещивающимися ребрами; 3) расстояние от ребер до параллельных граней; 4) расстояния между параллельными гранями; 5) углы между ребрами; 6) углы между ребрами и гранями; 7) углы между гранями; 8) границы для площадей и периметров некоторых характерных сечений; 9) расстояния между двумя точками на поверхности многогранника в пространстве и кратчайшее по поверхности; 10) ширину; 11) радиус описанной сферы; 12) радиус вписанной сферы; 13) радиус наибольшего шара, содержащегося в многограннике; 14) радиус наименьшего шара, содержащего многогранник. (Можно вычислить лишь некоторые из этих величин по вашему выбору.)

V.30. Проведите исследование таких пирамид: а) правильной треугольной пирамиды с ребром основания 1 и боковым ребром 2; б) прямоугольного тетраэдра с боковыми ребрами 1, 2, 3; в) треугольной пирамиды, основанием которой является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1 и боковыми ребрами, равными 2; г) тетраэдра, у которого пять ребер равны 2, а шестое равно 3; д) тетраэдра, у которого одна пара скрещивающихся ребер имеет длину 2, другая пара скрещивающихся ребер имеет длину 3, а третья пара скрещивающихся ребер имеет длину 4; е) четырехугольной пирамиды, у которой все ребра равны 1; ж) четырехугольной пирамиды, у которой в основании прямоугольник со сторонами 1 и 2, а высота, равная 1, проектируется в точку пересечения диагоналей основания; з) четырехугольной пирамиды, у которой в основании квадрат со стороной 1, а высота, равная 2, проектируется в середину стороны основания; и) четырехугольной пирамиды, у которой две соседние грани перпендикулярны основанию, высота и все стороны основания равны 1, а острый угол в основании равен 60°; к) правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой ребра оснований равны 2 и 1, а высота равна 3.

V.31. Проведите исследование таких призм: а) призмы, в основании которой равносторонний треугольник со стороной 1, одна боковая грань — квадрат, а острый угол в другой грани 60°; б) параллелепипеда, у которого все грани — ромбы с острым углом 60° при одной вершине параллелепипеда и стороной, равной 1; в) прямой призмы, в основании которой находится ромб со стороной 1 и острым углом 45°, высота этой призмы равна 2; г) прямоугольного параллелепипеда с ребрами 1, 2, 3; д) правильной треугольной призмы со стороной основания 1 и высотой 2; е) прямого параллелепипеда, у которого две грани — квадраты со стороной 1, а одна грань — ромб с углом 45°.

V.32. Проведите исследование многогранников, заданных тремя проекциями на рисунке 20. Необходимые размеры выберите сами.

Переключаемся

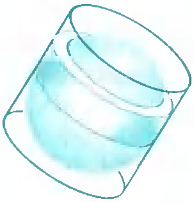
V.33. На реальном шаре требуется разметить вершины: а) правильного тетраэдра; б) куба; в) правильной четырехугольной пирамиды с заданной высотой; г) правильной треугольной призмы с заданным ребром основания. Как вы это сделаете?

Участвуем в олимпиаде

V.34. На каждом ребре тетраэдра, как на диаметре, построен шар. Докажите, что данный тетраэдр содержится в объединении этих шаров.

V.35. Многогранник описан около сферы радиусом R_1 и вписан в сферу радиусом R_2. Эти сферы имеют общий центр. Докажите, что число граней многогранника больше, чем $\frac{2R_2}{R_2-R_1}$.

Глава VI



Объемы

§ 27. Определение площади и объема

27.1. Простые фигуры

Каждый человек имеет представление о площади и объеме и умеет измерять их в простейших случаях. Но наша задача состоит в том, чтобы дать их точное определение. При этом будем исходить из того, что ясно и без геометрии. Понятно, например, что одинаковые участки земли имеют одну и ту же площадь и что когда участок составляется из двух, то их площади складываются. Аналогично одинаковые тела имеют один и тот же объем, а когда из двух тел составляется одно, то объемы их складываются.

Однако любые мыслимые в геометрии плоские фигуры и тела могут быть настолько сложно устроены, что приписать им всем площадь и объем с указанными свойствами нельзя. Поэтому выделим простые фигуры.

Будем называть фигуру **простой**, если она ограничена, граница ее не имеет внутренних точек и каждая прямая пересекает ее границу по конечному числу отдельных точек и отрезков либо вовсе не пересекает.

Примерами простых фигур являются всякая ограниченная выпуклая фигура, все многоугольники и многогранники и их конечные наборы. Наконец, заметим, что всякое реальное тело можно считать простым: пересечение границы тела с прямой по бесконечному числу отдельных отрезков и точек мыслимо лишь для идеального геометрического тела. Примером непростой фигуры является любая бесконечная последовательность точек, лежащая на отрезке.

Замечание. В определении простой фигуры сказано, что ее граница не имеет внутренних точек. Может показаться странным, как вообще граница может иметь внутренние точки. Но граница — фигура и как всякая фигура может иметь внутренние точки. Вот пример.

Представим себе систему координат x, y на плоскости. Пусть фигура F — это множество точек с рациональными координатами, лежащими в единичном квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Границей такой фигуры будет весь единичный квадрат. Сколь угодно близко к каждой точке квадрата есть точки как принадлежащие фигуре F, так и не принадлежащие ей. У точек же вне квадрата нет сколь угодно близких точек фигуры F. Значит, все точки в квадрате граничные для F.

27.2. Определение площади и объема

Теперь можно дать определение площади, включив в него лишь те два свойства, о которых говорилось в примере об участках земли.

Определение

Площадью простой плоской фигуры называется неотрицательная величина, определенная для каждой простой плоской фигуры так, что: 1) равные фигуры имеют равные площади; 2) если плоская фигура составлена из конечного числа простых плоских фигур, то ее площаль равна сумме их площадей.

Определение объема вполне аналогично определению площади.

Определение

Объемом простой фигуры называется неотрицательная величина, определенная для каждой простой фигуры в пространстве так, что: 1) равные простые фигуры имеют равные объемы; 2) если простая фигура составлена из конечного числа простых фигур, то ее объем равен сумме их объемов.

Говоря, что фигура составлена из нескольких фигур, мы имеем в виду, что она является их объединением и любые две данные фигуры не имеют общих внутренних точек. При этом *для плоских фигур это внутренние точки относительно плоскости, а в случае объема — относительно пространства.*

Для сравнения обратим еще внимание на то, что **длина отрезка** характеризуется такими же свойствами; это положительная величина, определенная для каждого отрезка так, что: 1) равные отрезки имеют равные длины; 2) если отрезок составлен из конечного числа отрезков, то его длина равна сумме длин этих отрезков.

Итак, длина, площадь, объем — неотрицательные величины, характеризующиеся одинаковыми свойствами, но заданные на разных классах фигур: длина — на множестве отрезков, площадь — на множестве простых плоских фигур, объем — на множестве простых пространственных фигур.

Кроме того, в данных определениях площади и объема подразумевается, что есть фигуры ненулевой площади, так же как фигуры ненулевого объема (формально условия для площади и объема были бы выполнены, если их считать равными нулю для всех фигур). Например, отрезок и квадрат — простые фигуры, но площадь отрезка равна нулю, а площадь квадрата положительна. Аналогично объем квадрата, как и всякой плоской фигуры, равен нулю, а объем куба положителен.

Для измерения — численного выражения площадей и объемов — выбирают квадрат и куб, площадь и объем которых считают равными единице.

Длины, площади и объемы измеряются в разных единицах. Эти единицы согласуют друг с другом следующим образом. Пусть выбрана единица длины — единичный отрезок, длина которого считается равной единице. Тогда за единицу измерения площади принимают площадь единичного квадрата, т. е. квадрата, стороной которого служит единичный отрезок. За единицу объема принимается объем единичного куба, т. е. куба, ребром которого служит единичный отрезок.

Так принято в геометрии. На практике же применяют разные единицы: длину измеряют метрами, миллиметрами, дюймами, футами и т. д.; площади — квадратными метрами, гектарами, акрами; объемы — кубическими метрами, литрами, галлонами, баррелями, бушелями и т. д.[1].

Для самого понятия площади и объема выбор единицы не играет роли, и совершенно необязательно считать за единицу объема, скажем, объем единичного куба. Можно было бы принять за единицу объема объем любого другого многогранника. Только это было бы не так удобно.

Ради простоты мы выберем раз и навсегда единичный отрезок, а вместе с ним единичный квадрат и единичный куб. Тогда под длинами, площадями и объемами будем понимать их численные значения в этих единицах.

---

[1] Это единицы объема, принимаемые в США и Англии. Бушелями измеряют объем зерна, баррелями — нефти, галлонами — бензина.

27.3. Существование площади и объема

Из определения объема еще непосредственно не следует ни его существование, ни его единственность. Во-первых, надо доказать, что на множестве простых фигур в пространстве существует неотрицательная величина со свойствами 1 и 2, и, во-вторых, выяснить, единственная ли такая величина. Ясно, что если существует хоть одна неотрицательная величина v со свойствами 1 и 2, то любая величина вида kv, где k — положительное число, тоже обладает этими свойствами. Можно доказать, что верно и обратное: если две неотрицательные величины заданы на множестве простых фигур и удовлетворяют свойствам 1 и 2, то они отличаются на постоянный множитель. (В этом утверждении и состоит единственность объема с точностью до постоянного множителя.) Единственность объема обеспечивается дополнительным условием: объем куба с единичным ребром считается равным единице.

После всего сказанного ясно, почему так важна теорема о существовании и единственности объема.

Теорема 27.1

При выбранном единичном кубе каждой простой фигуре соответствует, и притом единственное, неотрицательное число так, что выполнены свойства 1 и 2, указанные в определении объема. Это число — численное значение объема при данной единице — изменяется с изменением единицы по правилу: если берется в k раз меньший (больший) единичный отрезок, то численное значение объема увеличивается (уменьшается) в k^3 раз.

Так, километр в тысячу раз больше метра. Поэтому численное значение объема, измеренного в кубических километрах, в миллиард раз меньше численного значения объема того же тела, измеренного в кубических метрах. Доказывать эту трудную теорему мы не будем. Аналогичная теорема существования имеет место и для площади простой плоской фигуры.

Вообще вопрос о площади фигуры и особенно об объемах трудный, он не может быть изложен в нашем курсе строго. То же относится к вопросу о площади поверхности и о длине кривой. Все эти вопросы принадлежат, по существу, к трудным разделам высшей математики. Поэтому установим нужные результаты, руководствуясь больше наглядными соображениями.

Отметим еще, что площадь и объем можно определить не только для простых, но и для других фигур, однако такие определения для них будут более сложными.

Итак, простые пространственные фигуры имеют объем, а простые плоские фигуры — площадь. Договоримся, что в дальнейшем только их мы будем рассматривать. Нам предстоит решить вопрос о том, как находить объемы некоторых тел, выражая их через другие величины, характеризующие эти тела.

§ 28. Объем прямого цилиндра

28.1. Теорема об объеме прямого цилиндра

Теорема 28.1

Объем прямого цилиндра равен произведению площади его основания и высоты.

Замечание. У прямого цилиндра высота равна длине образующей, но здесь лучше говорить о высоте, потому что, как будет доказано, объем не только прямого, но и всякого цилиндра равен произведению площади основания и высоты.

До того как доказать эту теорему, мы обоснуем ее наглядными соображениями: в них заключается идея ее доказательства. Оно опирается на следующие два простых утверждения.

1) *Объем прямого цилиндра пропорционален высоте, т. е. длине его образующей.*

Представим себе прямой цилиндр как бревно постоянного сечения. Будем распиливать его на чурки (рис. 107). Зная длину чурок, мы можем сравнивать их объемы. Во сколько раз длиннее чурка, во столько раз больше будет ее объем, т. е. объем чурки пропорционален ее длине. Но что такое ровно отпиленная чурка, как не прямой цилиндр? Мы видим, что объем прямого цилиндра пропорционален длине его образую-

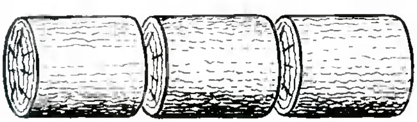


Рис. 107

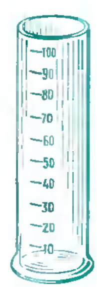


Рис. 108

щей, т. е. высоте. Другой пример: объем жидкости, наливаемой в цилиндрическую мензурку, пропорционален ее высоте (рис. 108).

2) *Объем прямого цилиндра пропорционален площади его основания.*

Для того чтобы убедиться в этом, будем колоть напиленные нами чурки. Раскалывая чурку, мы ударяем ее по верхнему основанию. Какую долю площади верхнего основания чурки отколем, такую же долю объема получим у отколотого полена (рис. 109). А полено, если оно ровное (как и чурка), тоже цилиндр. Таким образом, какую долю составляет площадь его основания, такую же долю составляет и его объем от объема исходного цилиндра. Аналогично объем всей жидкости в нескольких наполненных мензурках пропорционален их числу (рис. 110). А это значит, что объем цилиндра пропорционален площади основания.

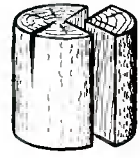


Рис. 109

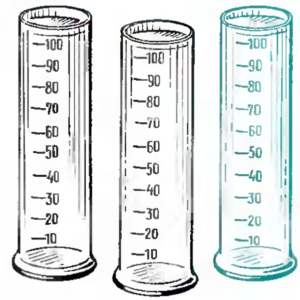


Рис. 110

Итак, *объем прямого цилиндра пропорционален и площади основания, и высоте. Следовательно, пропорционален их произведению.*

Обозначая объем V, площадь основания S, высоту H, можно написать: $V=aSH$, где a — коэффициент пропорциональности.

В частности, прямым цилиндром является единичный куб. У него $V=1$, $S=1$, $H=1$. Поэтому необходимо $a=1$. Следовательно, $V=S \cdot H$, как и утверждает теорема.

28.2*. Доказательство теоремы об объеме прямого цилиндра

Прямой цилиндр C однозначно определяется его основанием B и высотой D (отрезком, а не длиной). Поэтому объем $V(C)$ цилиндра C зависит только от B и D, т. е. является их функцией:

$$V(C)=V(B,D).$$

Покажем, что эта функция при фиксированном D обладает свойствами площади, а при фиксированном B — свойствами длины.

Рассмотрим цилиндры с основаниями на какой-либо данной плоскости с данной высотой D (рис. 111). Тогда объем такого цилиндра зависит только от основания B, так что можно написать $V(C)=f(B)$. Если основания B и B' таких цилиндров C и C' равны, то и цилиндры равны и, стало быть, равны их объемы: $V(C)=V(C')$, т. е. $f(B)=f(B')$. Значит, если фигуры B и B' равны, то $f(B)=f(B')$.

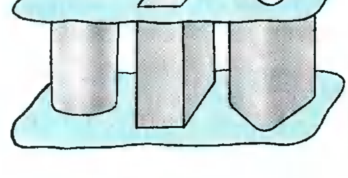


Рис. 111

Если основание B составлено из простых фигур B_1 и B_2, то цилиндр C составлен из C_1 и C_2, и, значит, $V(C)=V(C_1)+V(C_2)$, т. е. $f(B)=f(B_1)+f(B_2)$.

Таким образом, неотрицательная величина $f(B)$, заданная на множестве плоских фигур B, удовлетворяет двум условиям:

1) Если плоские фигуры B и B' равны, то $f(B)=f(B')$.

2) Если B составлена из B_1 и B_2, то $f(B)=f(B_1)+f(B_2)$.

Но этим же условиям удовлетворяет и площадь $S(B)$. Поэтому $f(B)$ и $S(B)$ отличаются на положительный множитель, т. е.

$$f(B)=kS(B).$$

Получаем, что $V(C)=f(B)=kS(B)$.

Заметим теперь, что коэффициент k мы получили для цилиндров фиксированной высоты D. Ниоткуда не следует, что для цилиндров с другими высотами коэффициент k будет тем же самым числом. Поэтому мы должны считать, что для каждой высоты D коэффициент k будет свой, т. е. $k=k(D)$. Тогда в общем случае получаем, что

$$V(C)=k(D)\,S(B). \qquad (28.1)$$

Покажем теперь, что величина $k(D)$ есть не что иное, как длина отрезка D.

Рассмотрим прямые цилиндры C с единичным квадратом B_0 в основании, т. е. призмы с квадратом в основании. Для такой призмы $S(B_0)=1$, и потому по формуле (28.1) ее объем

$$V(C)=k(D).$$

Если высоты D и D' таких призм равны, то и сами призмы C и C' равны, поэтому для них $V(C)=V(C')$, т. е.

$$k(D)=k(D').$$

Если призма C с высотой D составлена из призм C_1 и C_2 с высотами D_1 и D_2, то $V(C)=V(C_1)+V(C_2)$, т. е.

$$k(D)=k(D_1)+k(D_2).$$

Таким образом, неотрицательная величина $k(D)$ обладает двумя свойствами:

1) Если высоты, т. е. отрезки D и D', равны, то $k(D)=k(D')$.

2) Если высота, т. е. отрезок D, составлена из отрезков D_1 и D_2, то

$$k(D)=k(D_1)+k(D_2).$$

Но этими свойствами характеризуется длина отрезка. Поэтому величина $k(D)$ отличается от длины H отрезка D на постоянный положительный множитель, т. е. $k(D)=aH$, где $a>0$.

И так как $k(D)$ — это объем $V(C)$ призмы C, то

$$V(C)=k(D)=aH.$$

Поскольку C — призма с площадью основания 1, то при $H=1$ она оказывается единичным кубом, т. е. при $H=1$ значение $V(C)=1$, и, значит $a=1$. Таким образом, $k(D)=H$, и из (28.1) для объема любого прямого цилиндра получаем $V(C)=SH$.

Задачи

Разбираемся в решении

28.1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грани $ABCD$ и AA_1B_1B — квадраты со стороной d, $\angle A_1AD=\varphi$. Найдите объем параллелепипеда.

Решение

Если $\varphi=90°$, то объем параллелепипеда равен d^3 (?). Если $\varphi\neq 90°$, то данный параллелепипед не является прямым. А формула объема известна пока только для прямого цилиндра, а значит, и для прямого параллелепипеда. Как же быть?

Внимательно рассматривая рисунок 112, можно заметить, что так как $(AB)\perp(AA_1)$ и $(AB)\perp(AD)$, то $(AB)\perp(AA_1D)$. Но ведь нам ничего не мешает считать основанием параллелепипеда грань AA_1D_1D. А тогда параллелепипед становится прямым!

Найдем его объем:

$$V=S\cdot H=d^2\cdot\sin\varphi\cdot d=d^3\sin\varphi.$$

Заметим, что ответ $V=d^3$ для случая, когда $\varphi=90°$, входит частным случаем в полученный результат. Поэтому окончательно имеем: $V=d^3\sin\varphi$.

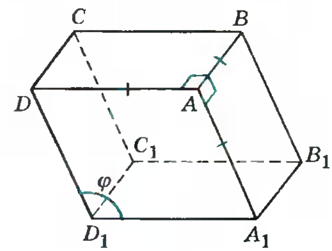


Рис. 112

Представляем

28.2. Через каждое ребро куба проведена плоскость, составляющая одинаковые углы с плоскостями граней, содержащих это ребро. При этом она не проходит через его внутренние точки. Во сколько раз объем полученного многогранника больше объема куба? Составьте аналогичную задачу для плоскостей, проходящих через вершины куба.

Работаем с формулой

28.3. Известна приближенная формула

$$(1+x)^3 \approx 1+3x$$

при малых значениях x. Дайте ее геометрическое истолкование.

Планируем

28.4. Многогранник задан тремя проекциями (рис. 113). Какие замеры надо сделать на этих проекциях, чтобы вычислить его объем?

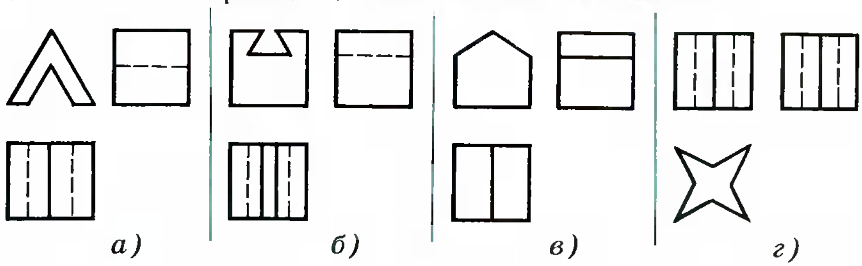


Рис. 113

Ищем границы

28.5. В каких границах находится объем цилиндра, у которого: а) диагональ осевого сечения равна 1; б) площадь осевого сечения равна S?

28.6. Из конуса радиусом R и высотой H вырезают цилиндр наибольшего объема. Чему равен этот объем?

28.7. В каких границах находится объем прямоугольного параллелепипеда, у которого в основании лежит квадрат, а диагональ равна 1?

28.8. Прямоугольник со сторонами 3 и 1 является разверткой боковой поверхности прямой треугольной призмы. Основание этой призмы — равнобедренный треугольник. В каких границах находится ее объем?

28.9. Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Вычислите наибольший объем правильной треугольной призмы, три вершины которой находятся на основании тетраэдра, а другие три — на его боковых гранях.

28.10. В прямоугольный тетраэдр, у которого перпендикулярные ребра имеют длину 1, вписан прямоугольный параллелепипед наибольшего объема. При этом его вершина совпадает с вершиной тетраэдра. Чему равен этот объем?

28.11. Заготовка имеет вид куба, на верхней грани которого находится правильная четырехугольная усеченная пирамида. Большее ее основание совпадает с гранью куба. Ребро куба равно 2. Ребро меньшего основания усеченной пирамиды равно 1. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 45°. Из этой заготовки нужно сделать прямоугольный параллелепипед, причем с минимумом отходов. Как это сделать?

28.12. В конус, у которого радиус основания равен высоте, вписан прямоугольный параллелепипед с наибольшим объемом. Будет ли он кубом?

28.13. На основании цилиндра находится полушар, большой круг которого совпадает с основанием цилиндра. Из заготовки такого вида хотят сделать цилиндр наибольшего объема. Как это сделать?

Прикладная геометрия

28.14. В цилиндрическом сосуде находится жидкость. Предложите различные способы, чтобы узнать, больше или меньше половины объема сосуда налито.

28.15. Можете ли вы объяснить, почему сужается струя воды, текущая из крана вертикально вниз?

28.16. Бумага свернута в цилиндрический рулон. Какие надо сделать замеры на рулоне, чтобы узнать, сколько квадратных метров бумаги намотано?

28.17. Объем жидкости в цилиндрической цистерне можно измерить с помощью прута. Как это сделать?

§ 29. Представление объема интегралом

Теорема 29.1

Пусть простая фигура T лежит между параллельными опорными плоскостями α и α', а $\alpha(x)$ — плоскость, лежащая между ними и удаленная на расстояние x от α (рис. 114). Тогда если $S(x)$ — площадь сечения $Q(x)$ фигуры T плоскостью $\alpha(x)$, то объем $V(T)$ фигуры T выражается формулой

$$V(T)=\int_0^H S(x)\,dx, \qquad (29.1)$$

где H — расстояние между α и α'.

Не будем проводить доказательство этой теоремы в полном объеме, так как оно сложно и требует расширения понятия интеграла. Докажем ее при некоторых дополнительных предположениях. Эти предположения выполняются во всех рассматриваемых ниже случаях, как в теории, так и в задачах, либо сразу для всей рассматриваемой фигуры, либо для каждой из ее частей после соответствующего разбиения фигуры на конечное число частей. Проверку выполнимости этих дополнительных предположений в каждом конкретном случае вы можете провести самостоятельно.

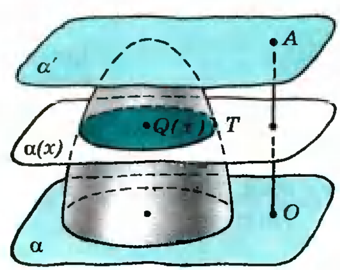


Рис. 114

1. Первое из дополнительных предположений состоит в требовании непрерывности функции $S(x)$. Оно вызвано тем, что, как известно, непрерывные функции

интегрируемы, т. е. интеграл в правой части равенства (29.1) существует.

2. Второе дополнительное предположение состоит в следующем. Допускаем, что любой достаточно тонкий слой ΔT фигуры T между близкими плоскостями $\alpha(x)$ и $\alpha(x+\Delta x)$ можно рассматривать приближенно как прямой цилиндр (рис. 115). Высота этого цилиндра равна $|\Delta x|$, а его основание мало отличается от сечения $Q(x)$. Поэтому объем $V(\Delta T)$ этого слоя ΔT приближенно равен объему цилиндра с основанием $Q(x)$ и высотой $|\Delta x|$:

$$V(\Delta T) \approx S(x)|\Delta x|.$$

Это приближенное равенство означает следующее. Если его заменить равенством

$$V(\Delta T) = (S(x)+\sigma)|\Delta x|, \qquad (29.2)$$

то величина σ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

При этих дополнительных предположениях мы и докажем теорему 29.1.

Пусть $T(x)$ — часть фигуры T, лежащая между плоскостями α и $\alpha(x)$ (рис. 115). Сместим параллельно плоскость $\alpha(x)$ на некоторое Δx. Получим фигуру $T(x+\Delta x)$. Она отличается от $T(x)$ на слой ΔT. Объем этого слоя

$$V(\Delta T) = |V(x+\Delta x) - V(x)| = |\Delta V|. \qquad (29.3)$$

Если Δx достаточно мало, то согласно формулам (29.2) и (29.3)

$$|\Delta V| = (S(x)+\sigma)|\Delta x|. \qquad (29.4)$$

Так как ΔV и Δx одного знака, то из (29.4) следует, что

$$\Delta V = (S(x)+\sigma)\Delta x, \qquad (29.5)$$

т. е.

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = S(x)+\sigma. \qquad (29.6)$$

Так как $\sigma \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = S(x),$$

т. е. $V'(x) = S(x)$.

Следовательно, объем $V(x)$ есть первообразная функция для $S(x)$. При этом $V(0)=0$, а $V(H)$ есть объем V_T всей фигуры T.

Поэтому

$$V_T = V(H) - V(0) = \int_0^H S(x)\,dx.$$

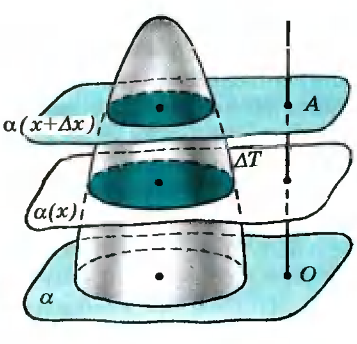


Рис. 115

Замечание. Предположение о том, что слой ΔT можно приближенно рассматривать как прямой цилиндр, позволяет дать и другой вариант доказательства.

Фиксируем некоторое $x \in [0; H]$ и возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что если $|\Delta x| < \delta$, то существуют такие прямые цилиндры C' и S'' с основаниями в плоскостях $\alpha(x)$ и $\alpha(x+\Delta x)$, первый из которых содержится в слое ΔT, а второй содержит этот слой (рис. 116), и при этом разность площадей их оснований S' и S'' меньше ε: $S'' - S' < \varepsilon$.

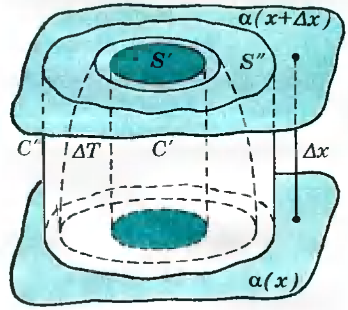


Рис. 116

При доказательстве теоремы это уточнение можно использовать так.

Для объемов фигур C', ΔT и C'' выполняются неравенства

$$V_{C'} \leqslant V_{\Delta T} \leqslant V_{C''}. \qquad (29.7)$$

Так как $V_{C'} = S'|\Delta x|$ и $V_{C''} = S''|\Delta x|$, то из (29.3) и (29.7) следует, что

$$S'|\Delta x| \leqslant |\Delta V| \leqslant S''|\Delta x|. \qquad (29.8)$$

Так как ΔV и Δx одного знака, то из (29.8) получаем:

$$S' \leqslant \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqslant S''. \qquad (29.9)$$

Кроме того, из включений $C' \subset \Delta T \subset S''$ следует, что

$$S' \leqslant S(x) \leqslant S''. \qquad (29.10)$$

Величины $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ и $S(x)$ лежат в одном и том же промежутке между S' и S'', причем $|S'' - S'| < \varepsilon$. Поэтому

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta x} - S(x)\right| < \varepsilon,$$

когда $|\Delta x| < \delta$. Следовательно, существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = S(x).$$

Задачи

Разбираемся в решении

29.1. Через диаметр основания цилиндра проведена плоскость под углом φ к основанию. Радиус цилиндра равен R. Найдите объем отсеченной части цилиндра.

Решение

Заметим, что отсеченных от цилиндра частей две. Условимся искать объем той части цилиндра, которая имеет меньший объем.

Вид этих частей существенно зависит от величины угла φ. Будем считать, что величина угла φ такова, что отсеченные части цилиндра имеют вид, изображенный на рисунке 117.

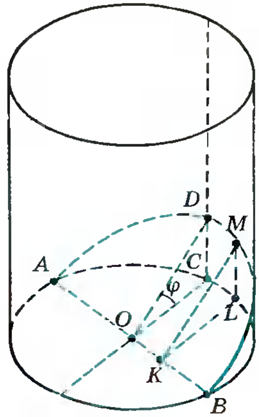


Рис. 117

Запишем формулу искомого объема через интеграл

$$V=\int_0^{2R} S(x)\,dx.$$

Здесь $x=KB$, $S(x)$ — это площадь прямоугольного треугольника KLM с катетами KL и LM и острым углом $\varphi=\angle LKM$.

Поэтому

$$V=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\cdot\int_0^{2R} KL^2dx, \text{ но } KL^2=-x^2+2Rx \ (?).$$

Тогда

$$V=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\int_0^{2R}(-x^2+2Rx)\,dx=\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\varphi.$$

Тот же результат можно получить, проводя сечения перпендикулярно (OC).

Теперь рассмотрите величину угла φ, при которой плоскость сечения пересечет и другое основание цилиндра, причем не по его диаметру.

Дополняем теорию

29.2. Бонавентура Кавальéри (1591—1647) вычислял объемы своим методом, который основывается на следующем утверждении: «Два тела равновелики, если: а) их основания лежат в одной плоскости, б) их высоты равны, в) равновелики любые сечения этих тел, проведенные параллельно плоскостям оснований на одном расстоянии от них». Дайте обоснование этому методу. Приведите пример вычисления объема этим методом. Найдите ему аналог в планиметрии.

29.3. Пусть площадь сечения тела, перпендикулярного оси x, выражается формулой $S(x)=ax^2+bx+c$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$. Докажите, что объем этого тела равен

$$\frac{1}{6}(x_2-x_1)\left(S(x_1)+4S\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+S(x_2)\right)$$

(формула Симпсона). Приведите примеры вычисления объема по этой формуле. Можно ли использовать эту формулу в планиметрии?

Находим величину

29.4. Основанием тела является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1. Каждое сечение тела, перпендикулярное одному из катетов, является полукругом. Вычислите объем тела.

29.5. Основанием тела является круг радиусом 1. Каждое сечение тела, перпендикулярное одному из диаметров круга, является квадратом. Вычислите объем тела.

29.6. Дан круг радиусом R. Треугольник движется так, что его плоскость перпендикулярна одному из диаметров. Одной из его сторон является хорда круга. Противоположная этой стороне вершина удалена от плоскости круга на расстояние d. Найдите объем полученного тела.

29.7. Оси двух бесконечных цилиндров равных радиусов пересекаются под прямым углом. Радиус цилиндров известен. Найдите объем их общей части.

29.8. Два одинаковых круговых наклонных цилиндра расположены так, что верхние их основания совпадают, а нижние касаются. Радиус основания каждого цилиндра равен R, высота каждого равна H. Найдите объем их общей части.

Прикладная геометрия

29.9. Предположим, вы захотели сварить себе кашу. Возьмите кастрюлю, насыпьте крупу и наклоните кастрюлю так, чтобы крупа закрыла половину дна. Заметьте точку на стенке кастрюли, ближайшую к ее краю, до которой поднялась крупа, и зажмите ее пальцем. Пересыпьте крупу в другое место, а в эту кастрюлю налейте воды до полученной отметки. Можете начинать варить кашу. Пока она варится, подумайте, почему отношение объемов крупы и воды не зависит ни от количества взятой крупы, ни от размеров кастрюли.

§ 30. Объемы некоторых тел

Применим теорему предыдущего параграфа к нахождению объемов произвольного конуса, шара и некоторых других тел.

30.1. Объем цилиндра

В § 28 мы нашли объем прямого цилиндра, тот же результат верен для любого цилиндра.

Теорема 30.1

Объем цилиндра (в частности, призмы) равен произведению площади основания и высоты: $V=SH$.

Доказательство. Пусть $Q(x)$ — сечение данного цилиндра плоскостью, параллельной плоскости основания и проведенной на расстоянии x от нее.

Расстояние x меняется от 0 до высоты H. Площади $S(x)$ всех сечений $Q(x)$ равны площади основания S, т. е. $S(x)=S$.

По формуле (29.1)

$$V=\int_0^H S(x)\,dx=\int_0^H S\,dx=S\int_0^H dx=SH. \blacksquare$$

30.2. Объем конуса

Теорема 30.2

Объем конуса (в частности, пирамиды) равен одной трети произведения площади основания и высоты:

$$\boldsymbol{V=\frac{1}{3}SH.}$$

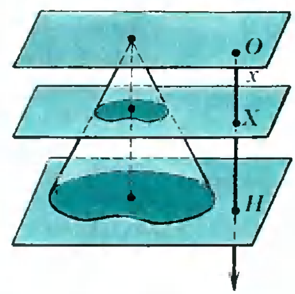


Рис. 118

Доказательство. Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, подобно основанию. Если плоскость проходит на расстоянии x от вершины, то коэффициент подобия равен $\frac{x}{H}$ (рис. 118). Поэтому площадь сечения $Q(x)$ такой плоскостью равна

$$S(x)=\left(\frac{x}{H}\right)^2 S,$$

где S — площадь основания.

По формуле (29.1) объем конуса K будет

$$V(K)=\int_0^H S(x)\,dx=\int_0^H S\frac{x^2}{H^2}\,dx=\frac{S}{H^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^H=\frac{1}{3}SH.$$

Следовательно,

$$V=\frac{1}{3}SH. \blacksquare$$

30.3. Объем шара

Теорема 30.3

Объем шара радиусом R выражается формулой

$$\boldsymbol{V=\frac{4}{3}\pi R^3.}$$

Доказательство. Рассмотрим шар радиусом R. Удобнее взять полушар — часть шара, ограниченную плоскостью, проходящей через центр. Плоскость, параллельная ей и проходящая от нее на расстоянии $x<R$, пересекает шар по кругу радиусом $\sqrt{R^2-x^2}$ (рис. 119). Площадь $S(x)$ этого круга будет равна $\pi(R^2-x^2)$. Объем полушара равен, очевидно, половине объема V шара. Его можно найти по формуле (29.1), где расстояние H равно R.

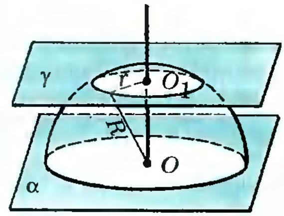


Рис. 119

Эта формула дает:

$$\frac{1}{2}V=\pi\int_0^R (R^2-x^2)\,dx.$$

Вычисляем:

$$\int_0^R (R^2-x^2)\,dx=\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{2}{3}R^3.$$

Следовательно, $\frac{1}{2}V=\frac{2}{3}\pi R^3$ и $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. ■

30.4. Объемы некоторых тел вращения

У шара, цилиндра вращения, конуса вращения есть общее свойство — эти тела состоят из кругов, которые имеют центры на одном отрезке прямой — **оси вращения** — и лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения (рис. 120). (К шару добавляются, конечно, еще две точки — полюсы, а к конусу — одна точка — вершина.) Рассмотрим какое-нибудь тело, обладающее таким свойством (рис. 121), и найдем его объем.

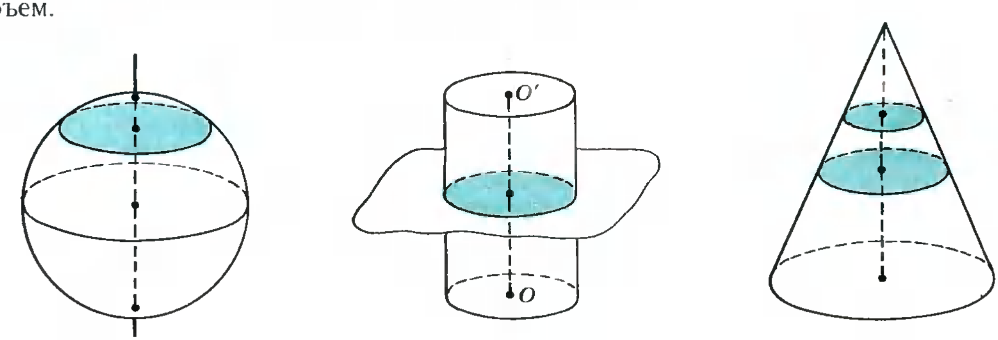


Рис. 120

Введем на его оси вращения координату x, отсчитываемую от одного конца оси до другого. Через концы оси проходят перпендикулярные ей опорные плоскости. Пусть H — расстояние между ними.

Пусть $r(x)$ — радиус круга, по которому тело пересекает плоскость, перпендикулярную оси и проходящую через точку с координатой x. Площадь этого круга равна $\pi r^2(x)$. Поэтому, применяя формулу (29.1), получаем для объема рассматриваемого тела выражение

$$V=\pi\int_0^H r^2(x)\,dx.$$

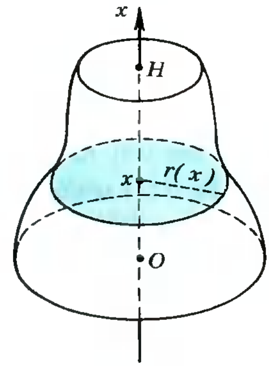


Рис. 121

Фигуры, полученные в пересечении фигуры вращения с полуплоскостью, ограниченной осью вращения, называются **меридианами фигуры вращения.** Например, меридиан сферы — это полуокружность.

Если представить себе, что полуплоскости, ограниченные осью фигуры вращения, поворачиваются вокруг этой оси, то все меридианы фигуры вращения будут совмещаться друг с другом при таких поворотах. Поэтому, пользуясь представлением о непрерывном вращении, можно сказать, что фигура вращения получается в результате вращения плоской фигуры вокруг оси, лежащей в той же плоскости (рис. 122).

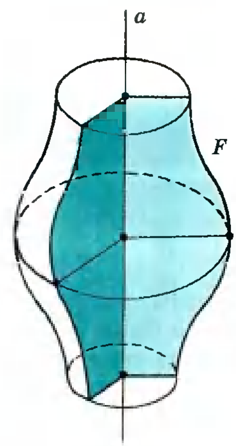


Рис. 122

О фигурах вращения так и говорят: фигура, полученная вращением такой-то плоской фигуры вокруг такой-то оси.

Например, шар получается вращением полукруга вокруг ограничивающего его диаметра, сфера — вращением полуокружности.

Замечание. Под осью вращения понимается иногда прямая, а иногда отрезок прямой.

Дополнение к главе VI

Равновеликость и равносоставленность

До этой главы при построении стереометрии мы пользовались лишь чисто геометрическими методами и сравнительно мало применяли аналитические методы, причем в применении таких методов нам достаточно было средств элементарной алгебры и простейших тригонометрических результатов. При этом доказывались все утверждения основной линии курса.

В этой же главе при изложении теории объемов мы вынуждены были оставить без доказательства теорему о существовании и единственности объема простой фигуры (и аналогичную ей планиметрическую теорему о площади), а для вычисления объемов цилиндров, конусов и шара применить средства дифференциального и интегрального исчисления. О том, что эти вопросы относятся, по существу, к трудным разделам высшей математики, мы уже говорили в п. 27.3. Но нельзя ли было хотя бы вопрос об объемах многогранников решить элементарными средствами, подобно тому как в планиметрии был решен вопрос о площади многоугольников? Напомним, что он решался так: сначала доказывали, что площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон; затем, перестраивая любой треугольник в прямоугольник с той же площадью (рис. 123), получали известную формулу для площади треугольника и, наконец, разбивая любой многоугольник на треугольники, вычисляли площадь многоугольника.

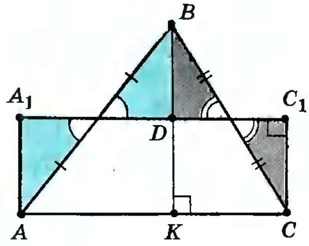


Рис. 123

Так как любой многогранник можно разбить на тетраэдры, то ясно, что вычисление объема многогранника можно было бы провести по той же схеме, если бы мы смогли перестроить любую пирамиду в прямоугольный параллелепипед того же объема.

Эта задача является частным случаем более общей задачи, решение которой началось еще в Древней Греции и завершилось лишь в XX в. Чтобы сформулировать эту задачу, введем два понятия.

Будем называть **равновеликими** две плоские фигуры, если их площади равны, и две пространственные фигуры, если их объемы равны.

Две фигуры будем называть **равносоставленными**, если их можно разбить на конечное число соответственно равных друг другу частей, причем различные части каждой фигуры не перекрываются, т. е. не имеют общих внутренних точек (рис. 124). При этом в случае плоских фигур имеются в виду их внутренние точки на плоскости, а для пространственных фигур — внутренние точки в пространстве.

Из свойств площади и объема, очевидно, следует, что равносоставленные фигуры равновелики. Ясно, что в общем случае обратное утверждение не имеет места (попробуйте привести соответствующие примеры). Но есть классы фигур, для которых оно верно. Прежде всего это класс многоугольных фигур.

На равносоставленности любых равновеликих многоугольников, в частности на равносоставленности равновеликих треугольника и прямоугольника, и основано вычисление площадей многоугольников.

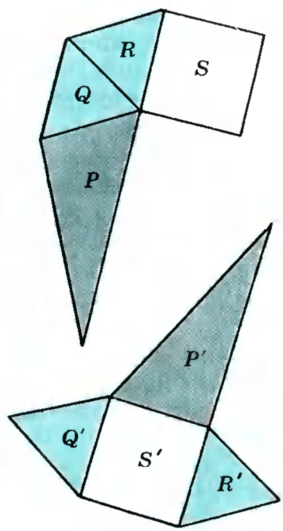


Рис. 124

В общем же виде теорема о том, что *любые два равновеликих многоугольника равносоставлены*, доказана была в XIX в. венгерским математиком Ф. Бойаи[1] (в 1832 г.) и немецким офицером и любителем математики П. Гервином (в 1833 г.) и поэтому носит название теоремы Бойаи — Гервина.

Для многогранников аналогичный результат не имеет места. И в этом причина того, что, начиная с древнегреческого геометра Евдокса Книдского (ок. 406 — ок. 355 до н. э.), для вычисления объема пирамиды приходилось применять сложные методы, связанные с предельным переходом и, по существу, сходные с интегральным исчислением.

Если не пользоваться интегральным исчислением, то, вычисляя объем пирамиды, приходится приближать ее ступенчатыми многогранниками, составленными из призм (строить так называемую «чертову лестницу», рис. 125).

Вопрос о том, равносоставлены ли равновеликие многогранники, был включен знаменитым немецким математиком Давидом Гильбертом (1862—1943) в число двадцати трех проблем, о которых он сделал доклад в 1900 г. на II Международном конгрессе математиков в Париже (эти проблемы «девятнадцатый век завещал двадцатому»).

Уже в 1901 г. ученик Гильберта Макс Ден (1878—1952) дал отрицательное решение третьей проблемы Гильберта: он доказал, что *правильный тетраэдр не равносоставлен с равновеликим ему кубом*. Оказалось, что вопрос о равносоставленности равновеликих многогранников решается не так, как для многоугольников.

Ден получил некоторые необходимые условия, которым должны удовлетворять равносоставленные многогранники. Куб и равновеликий ему правильный тетраэдр не удовлетворяют этим условиям. Поэтому они не равносоставлены.

В 1959 г. французский математик П. Сидлер установил, что условия Дена не только необходимы, но и достаточны для равносоставленности многогранников. Тем самым проблема равносоставленности многогранников теперь полностью решена.

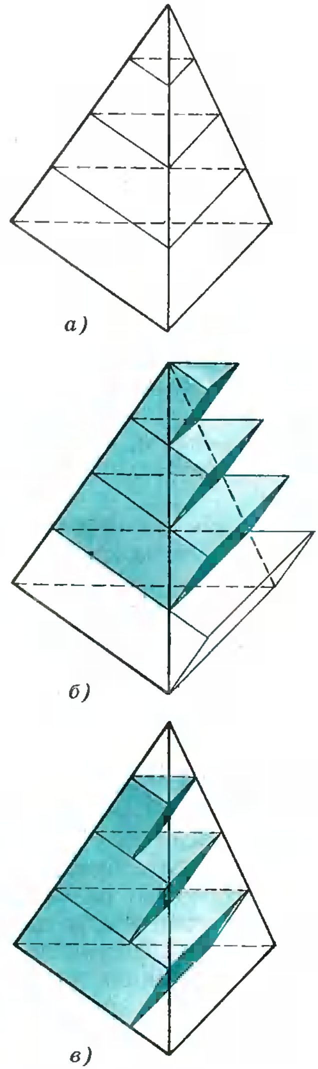


Рис. 125

[1] Фаркаш Бойаи (1775—1856) — отец Яноша Бойаи, одного из создателей неевклидовой геометрии.

Задачи

Разбираемся в решении

30.1.(2). Пусть $PABCD$ — пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной 1. $(PB) \perp (ABC)$ (рис. 126). Двугранный угол при ребре PD равен 120°. Вычислите объем пирамиды.

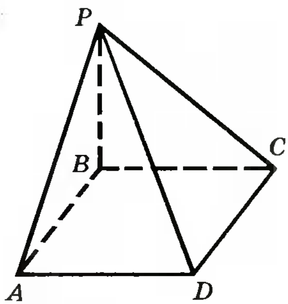


Рис. 126

Решение

Поиск тех или иных геометрических величин, как правило, начинается с того, что выписывается нужная формула. Затем из анализа условия задачи выясняется, что в этой формуле легко найти, а что неизвестно. После этого сосредоточивают усилия на поиске неизвестной величины.

Поэтому запишем формулу для объема пирамиды $V=\frac{1}{3}SH$. S исходя из условия находится моментально: $S=1$, поэтому осталось вычислить высоту пирамиды, т. е. $|PB|$. Это вычисление можно выполнить несколькими способами, попробуйте найти их самостоятельно.

Вспомним, что мы уже видели пирамиду, похожую на данную.

В самом деле, возьмем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 и соединим вершину B_1 с вершинами основания A, B, C, D. Полученная пирамида B_1ABCD и будет данной в условии этой задачи, ибо двугранный угол при ребре B_1D равен 120° (?). Но если данная пирамида — часть куба с ребром 1, то $|PB|=1$ и ее объем равен $\frac{1}{3}$.

Ответ получен, но решения пока нет (?).

Нам нужно еще доказать, что данная пирамида действительно часть куба с ребром 1, т. е. утверждение, обратное тому, которое мы вспомнили. Для этого воспользуемся соображениями:

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ двугранный угол при диагонали B_1D равен 120°.

2. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ зависимость величины двугранного угла при диагонали B_1D от $|B_1B|$ строго монотонная (?). (Какая именно монотонность?)

3. Но тогда и обратная зависимость $|B_1B|$ от величины этого двугранного угла строго монотонная. Отсюда следует, что в пирамиде $PABCD$ двугранному углу при ребре PD, равному 120°, соответствует $|PB|=1$, что и требовалось доказать.

Эта идея реализовалась именно потому, что был дан угол 120°. При угле 119°, а тем более в общем случае пришлось бы искать другие пути решения задачи.

Дополняем теорию

30.2.(1). Докажите, что объем произвольной призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения и длины бокового ребра. Как использовать этот результат для нахождения объема реальной наклонной призмы?

30.3.(3). а) Часть шара, отсеченная от него какой-либо плоскостью, называется **шаровым сегментом**. Круг, полученный в сечении шара данной плоскостью, назовем **основанием шарового сегмента**, а расстояние от плоскости сечения до параллельной ей опорной плоскости шарового сегмента — **высотой** этого **сегмента**. Пусть радиус шара равен R, а высота шарового сегмента равна H. Выведите формулу объема шарового сегмента через эти величины.

б) **Шаровой сектор** — это часть шара, состоящая из шарового сегмента и конуса с вершиной в центре шара и основанием, совпадающим с основанием шарового сегмента (при этом шаровой сегмент меньше полушара). При условии, данном в пункте а), получите формулу объема шарового сектора.

в) Как из формул, полученных в пунктах а) — б), выводится формула объема шара?

30.4.(4). Пусть простая фигура получилась в результате вращения плоской фигуры F относительно оси, лежащей в плоскости данной фигуры, причем F расположена по одну сторону от оси. Пусть F имеет ось симметрии, параллельную оси вращения (центр симметрии). Докажите, что объем полученного тела вращения можно вычислить по формуле $S \cdot L$, где S — площадь фигуры F, L — длина окружности, радиус которой равен расстоянию от оси симметрии (центра симметрии) до оси вращения.

30.5.(4). Пусть простая фигура получена вращением плоской фигуры F вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры F, причем F расположена по одну сторону от оси. Докажите, что объем тела вращения равен произведению площади фигуры F и длины окружности, описанной центром масс фигуры F (теорема Паппа — Гюльдена). Выведите следствия из этой теоремы.

Планируем

30.6.(2). Как найти объем правильной n-угольной пирамиды, у которой известны: а) сторона основания и высота; б) сторона основания и боковое ребро; в) сторона основания и плоский угол при вершине; г) сторона основания и двугранный угол при основании; д) боковое ребро и его угол с основанием; е) боковое ребро и угол между боковыми гранями; ж) высота и плоский угол при вершине?

30.7.(2). Как найти объем правильной усеченной n-угольной пирамиды по: а) сторонам двух оснований и высоте; б) сторонам двух оснований и углу между боковым ребром и бóльшим основанием; в) сторонам двух оснований и углу между боковой гранью и бóльшим основанием; г) сторонам двух оснований и углу между соседними боковыми гранями; д) площадям каждого из оснований и площади боковой грани?

30.8.(2). Стороны основания треугольной пирамиды известны. Все боковые ребра наклонены к основанию под углом φ. Как найти объем пирамиды?

30.9.(2). Известны три боковых ребра треугольной пирамиды и углы между ними. Как найти объем пирамиды?

30.10.(2). В основании пирамиды $PABCD$ лежит прямоугольник. $(PA)\perp(AD)$, $(PB)\perp(AB)$, $(PC)\perp(CD)$. Известны площади всех граней. Как найти объем пирамиды?

30.11.(2). Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, которое является трапецией с площадью S. Какие надо сделать замеры на ее поверхности, чтобы найти объем?

30.12.(2). В шаре радиусом R провели два параллельных сечения на расстоянии H между собой. Как вы будете искать объем части шара **(шарового пояса)**, заключенной между ними?

Находим величину

30.13.(1). В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник со стороной d_1. Ее боковое ребро давно d_2. Найдите ее объем, если: а) ребро AA_1 составляет с ребрами AB и AC угол φ; б) грань BCC_1B_1 — прямоугольник, плоскость которого наклонена к основанию под углом φ.

30.14.(1). В параллелепипеде все грани — ромбы со стороной d и острым углом φ. Найдите его объем.

30.15.(1). На диагоналях граней AB_1, AC, AD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построен новый параллелепипед. Найдите отношение объемов нового и старого параллелепипедов.

30.16.(2). Вода в коническом сосуде была налита доверху. а) На сколько понизился ее уровень, когда отлили половину имевшейся воды? б) Какая часть объема осталась, когда уровень воды понизился вдвое?

30.17.(2). Радиус основания конуса равен 2, а высота равна 1. В нем провели сечение: а) через вершину под углом 45° к его высоте; б) через вершину под углом 60° к его основанию; в) являющееся прямоугольным треугольником; г) являющееся равносторонним треугольником. Найдите отношение объемов получившихся некруговых конусов.

30.18.(2). Сторона основания прямоугольного тетраэдра равна d. Найдите его высоту.

30.19.(2). В основании пирамиды равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом d. Боковые ребра пирамиды равны. Угол между боковыми гранями, проходящими через катеты, равен φ. Найдите объем пирамиды.

30.20.(2). В пирамиде $PABC$ $(AB)\perp(BC)$, $|AB|=|PB|=2$, $|BC|=3$, $|PC|=4$. Вычислите объем пирамиды, если (PAB) перпендикулярна: а) (PBC); б) (PAC).

30.21.(2). Два прямых двугранных угла, ребра которых перпендикулярны, пересекаются так, что ребро каждого из них образует равные углы с гранями другого двугранного угла. Расстояние между ребрами двугранных углов равно d. Найдите объем многогранника, полученного в их пересечении. Обобщите задачу.

30.22.(2). Правильный тетраэдр разделили всевозможными плоскостями, проходящими через ребро и середину противоположного ребра. Какую часть от объема тетраэдра составляет объем наименьшего (по объему) многогранника, полученного в этом разбиении?

30.23.(2). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Какую часть от его объема составляют объемы тетраэдров: а) A_1ABD; б) B_1BDC; в) $DA_1B_1C_1$; г) CAA_1B_1; д) $A_1DD_1B_1$; е) $A_1AB_1D_1$; ж) AB_1D_1C; з) K_1L_1KL, где точки K и L делят на три равные части отрезок AC, а точки K_1 и L_1 делят на три равные части отрезок B_1D_1?

30.24.(2). В четырехугольной пирамиде основанием является квадрат со стороной d, три ее боковые ребра равны d. Найдите объем пирамиды.

30.25.(2). Основанием пирамиды $PABCD$ является ромб. $|AC|=d_1$, $|BD|=|BP|=|PD|=d_2$, $(BPD)\perp(ABC)$. Найдите объем пирамиды.

30.26.(2). Разверткой треугольной пирамиды является квадрат со стороной d. Найдите ее объем.

30.27.(2). Четырехугольная пирамида имеет объем 3 и высоту 1. Какова площадь развертки, если: а) в основании ее квадрат и одна боковая грань перпендикулярна основанию; б) в основании ее квадрат и две боковые грани перпендикулярны основанию; в) в основании ее квадрат, а боковые грани равнонаклонены к основанию; г) в основании ее прямоугольник, а боковые ребра равнонаклонены к основанию?

30.28.(2). В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ через AB и KL — среднюю линию противоположной грани проведено сечение. С какой стороны от него находится многогранник большего объема?

30.29.(2). В прямом параллелепипеде центры двух оснований соединены с вершинами противоположных граней. Внутри параллелепипеда образовался многогранник. Какую часть составляет его объем от объема параллелепипеда?

30.30.(2). а) Правильный тетраэдр с объемом V срезан по углам плоскостями так, что на каждой грани образовался правильный многоугольник. Найдите объем оставшегося многогранника. б) Попробуйте решить аналогичную задачу для куба, объем которого равен V. (Все вершины полученных многогранников лежат на ребрах исходных.)

30.31.(2). Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной 1, $(PA)\perp(ABC)$, $|PA|=2$, $(QC)\perp(ABC)$, $|QC|=2$. Точки P и Q лежат по одну сторону от плоскости (ABC). Вычислите объем многогранника $PQABCD$.

30.32.(2). Две четырехугольные пирамиды имеют общим основанием квадрат со стороной 1. Их вершины находятся по одну сторону от плоскости основания и удалены от него на расстояние 1. Вычислите объем общей части этих пирамид, если вершины проектируются на: а) две соседние вершины квадрата; б) две противоположные вершины квадрата; в) середины двух соседних сторон квадрата; г) середины двух противоположных сторон квадрата.

30.33.(2). В четырехугольную пирамиду с равными ребрами вписан куб. Четыре его вершины лежат на боковых ребрах пирамиды. Найдите отношение объема куба к объему пирамиды. Решите такую же задачу, если вершины куба лежат на апофемах пирамиды.

30.34.(3). Какая часть объема шара радиусом R содержится между двумя концентрическими сферами (с одним центром) радиусами $0{,}9R$ и R? Каким взять радиус меньшей сферы, чтобы между ними заключалась четвертая часть объема шара? половина объема шара?

30.35.(1). Как из усеченного конуса сделать цилиндр наибольшего объема?

30.36.(1). Боковое ребро параллелепипеда равно d, площади граней, содержащих это ребро, равны S_1 и S_2. Найдите наибольшее значение его объема.

30.37.(1). Четыре грани параллелепипеда — квадраты. Сторона квадрата равна d. Найдите наибольшее значение объема параллелепипеда.

30.38.(2). В каких границах находится объем конуса, у которого известна: а) площадь осевого сечения; б) образующая?

30.39.(2). Найдите наибольшее значение объема треугольной пирамиды, у которой: а) все боковые ребра равны d и все углы между ними равны; б) две грани — равносторонние треугольники со стороной d; в) четыре ребра имеют длину d; г) три ребра имеют длину 2, а еще два имеют длину 3.

30.40.(2). Найдите наибольшее значение объема тетраэдра $PABC$, у которого в основании лежит: а) равносторонний треугольник со стороной d_1, $|PA|=d_2$, $(PBC)\perp(ABC)$; б) прямоугольный равнобедренный треугольник PAB с гипотенузой AB, равной d, а $(PC)\perp(ABC)$.

30.41.(2). Чему равен наибольший объем правильной треугольной пирамиды, у которой сумма всех ребер равна 3?

30.42.(2). Дана правильная треугольная пирамида. Вычислите наибольшее значение ее объема, если: а) боковое ребро равно 1; б) апофема равна 1.

30.43.(2). Найдите наибольшее значение объема пирамиды, у которой в основании лежит: а) квадрат, а каждое боковое ребро равно d; б) прямоугольник, у которого одна сторона в два раза больше другой, а каждое боковое ребро равно d.

30.44.(2). Основание куба с ребром d лежит на плоскости α. Его хотят заключить в правильную четырехугольную пирамиду, основание которой также находится в плоскости α. Можете ли вы найти наименьший объем такой пирамиды?

30.45.(2). Основанием пирамиды $PABCD$ является прямоугольник. $|PA|=|PB|=|PC|=|PD|=|AD|=d$. В каких границах находится ее объем?

30.46.(2). Из квадратного листа со стороной 2 вырезали развертку правильной четырехугольной пирамиды так, что вершины квадрата склеиваются в вершину пирамиды. В каких границах лежит значение ее объема?

30.47.(2). Из правильной n-угольной пирамиды делают цилиндр. Его основание находится на основании пирамиды. Какую часть от объема пирамиды составляет наибольший объем такого цилиндра?

30.48.(2). Какую часть от объема шара составляет наибольший объем вписанных в него: а) прямоугольного параллелепипеда; б) правильной треугольной пирамиды; в) правильной четырехугольной пирамиды; г) правильной треугольной призмы; д) цилиндра; е) конуса?

30.49.(3). Вычислите объем наибольшего шара, расположенного в: а) прямоугольном параллелепипеде с ребрами 1, 2, 3; б) правильном тетраэдре с ребром 1; в) правильной треугольной призме с ребром 1; г) правильной четырехугольной пирамиде с ребром 1; д) правильном октаэдре с ребром 1; е) параллелепипеде, у которого все грани — ромбы со стороной 1 и острым углом 60°; ж) треугольной призме с ребром 1, одна грань которой — квадрат и образует с плоскостью основания угол 45°; з) конусе, осевое сечение которого — прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой 1; и) цилиндре, осевое сечение которого — квадрат со стороной 1.

30.50.(3). В основании пирамиды $PABCD$ квадрат со стороной 2, ее высота равна 1. Какая из следующих пирамид содержит наибольший по объему шар: а) правильная четырехугольная; б) пирамида, у которой вершина проектируется в середину ребра основания; в) пирамида, у которой вершина проектируется в вершину основания?

Доказываем

30.51.(2). Из планиметрии известно следующее: если на сторонах угла A отложить от вершины отрезки AB_1 и AB_2 на одной стороне, AC_1 и AC_2 на другой стороне, то отношение площадей треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2 равно отношению произведений длин отрезков AB_1 и AC_1 к AB_2 и AC_2. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение в пространстве.

30.52.(2). Через одну из вершин тетраэдра провели плоскость, перпендикулярную ребру, проходящему через эту вершину. Тетраэдр спроектировали на эту плоскость. Пусть d — длина выбранного ребра, а S — площадь проекции тетраэдра. Докажите, что объем тетраэдра равен $\frac{1}{3}Sd$. Обобщите эту задачу. Укажите применения полученному результату.

30.53.(2). Дан выпуклый многогранник, у которого все грани равновелики. Внутри его берется точка. Докажите, что при любом выборе точки сумма расстояний от нее до плоскостей его граней одна и та же. Каково аналогичное утверждение в планиметрии?

Исследуем

30.54.(1). Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма. Ее грань ABB_1A_1 принята за основание параллелепипеда, боковым ребром которого является ребро призмы BC. Сравните объем призмы и объем параллелепипеда. Отсюда получите формулу для вычисления объема призмы через площадь одной из ее боковых граней и расстояние от плоскости этой грани до прямой, проходящей через противоположное ребро призмы. Какие следствия вы можете получить из этой формулы?

30.55.(1). Сможете ли вы найти объем параллелепипеда, если известны: а) три ребра, выходящие из одной вершины, и углы, которые они образуют между собой; б) три высоты; в) диагональ и углы, которые она образует с тремя ребрами, выходящими из той же вершины, что и она; г) диагональ и углы ее с тремя гранями, с которыми она имеет общую точку?

30.56.(2). Треугольник ABC равносторонний со стороной d. Через его центр проведена прямая, перпендикулярная его плоскости. На ней взяты две точки P_1 и P_2 так, что из точки P_1 все стороны треугольника видны под углом φ_1, а из точки P_2 все стороны треугольника видны под углом φ_2. Объем пирамиды P_1ABC равен V. Сможете ли вы найти объем многогранника с вершинами в точках P_1, P_2, A, B, C?

30.57.(2). Пусть $ABCD$ — тетраэдр, точки K, L, M, N — середины ребер AC, BC, BD, AD. Расстояние между прямыми AB и CD равно d. Площадь сечения $KLMN$ равна S. Можете ли вы найти объем тетраэдра?

30.58.(2). Есть ли внутри тетраэдра $ABCD$ такая точка P, что объемы тетраэдров $PABC$, $PACD$, $PBCD$, $PBAD$ равны? Как выглядит аналогичная задача в планиметрии?

30.59.(2). Отрезок CD длиной 1 движется по прямой, перпендикулярной (AB). $|AB|=1$. Расстояние между прямыми AB и CD равно 1. а) Меняется ли при этом движении объем тетраэдра $ABCD$? б) Ответьте на тот же вопрос при условии, что отрезок CD вращается вокруг общего перпендикуляра AC к прямым AB и CD.

30.60.(2). В основании пирамиды лежит квадрат со стороной d. Две противоположные ее грани — равнобедренные треугольники, углы при их вершинах равны φ_1 и φ_2. Можете ли вы найти объем пирамиды?

30.61.(2). а) Пусть $ABCD$ — квадрат. Треугольники BKC и ALD лежат в плоскостях, перпендикулярных плоскости квадрата, по одну сторону от нее. $|CK|=|AL|$, $|BK|=|DL|$. Можете ли вы вычислить объем многогранника с вершинами в точках A, B, C, D, K, L?

б) Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной d_1. ABK и CDL — равносторонние треугольники по одну сторону от его плоскости. $(KL)\|(ABC)$. $|KL|=d_2$. Можно ли найти объем многогранника $ABCDKL$?

Прикладная геометрия

30.62.(2). В конический сосуд, стоящий на столе, налили воду и сделали отметку ее уровня на его поверхности. Потом сосуд перевернули вершиной вниз, и оказалось, что уровень воды достиг той же отметки. Какую часть от объема конуса составляет объем налитой в него воды? В каком отношении поставленная отметка делила образующую конуса? Изменится ли результат задачи, если вместо конуса взять другой сосуд?

30.63.(2). Дождь идет равномерно и долго. Можете ли вы за небольшой промежуток времени узнать, за сколько времени наполнится дождевой водой ведро, имеющее форму усеченного конуса?

30.64.(2). Как найти объем реального тетраэдра, делая замеры только на его поверхности?

30.65.(3). Из одной и той же массы мыльной жидкости можно делать пузыри разных размеров. Как меняется их толщина при увеличении их радиуса? Попробуйте произвести соответствующие расчеты, можно приближенные. Пусть радиус мыльного пузыря увеличился в два раза. Как изменилась его толщина?

30.66.(3). Как вычислить радиус металлического шарика, используя линейку и прозрачный металлический сосуд с водой?

30.67.(3). Колечко ограничено цилиндрической и сферической поверхностью. Как найти его объем?

Рассуждаем

30.68.(2). Объясните, каким образом из формулы объема усеченного конуса можно получить формулу объема цилиндра и формулу объема конуса.

Задачи к главе VI

Дополняем теорию

VI.1. а) Выведите формулу объема тетраэдра через длины двух его скрещивающихся ребер, угол между ними и расстояние между прямыми, на которых они лежат. б) Докажите, что объем тетраэдра равен $\frac{2}{3}Sd$, где S — площадь сечения, равноудаленного от двух скрещивающихся ребер тетраэдра и параллельного им, а d — расстояние между прямыми, на которых лежат эти ребра.

Находим величину

VI.2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и DCC_1D_1. В каком отношении оно делит: а) ребра куба, которые пересекает; б) объем куба? Чему равна его площадь, если ребро куба равно d?

VI.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через середины ребер A_1C_1, AB и середину ее оси провели плоскость. В каком отношении она делит: а) ребра призмы, которые пересекает; б) объем призмы? Чему равна его площадь в призме, у которой все ребра равны d?

VI.4. Прямоугольный параллелепипед имеет ребра длиной 1, 2, 3. Возьмите любые две скрещивающиеся диагонали соседних его граней и вычислите расстояние между ними, используя формулы объемов.

VI.5. Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники. Высота пирамиды лежит в одной из граней. Расстояние между наибольшими боковыми ребрами равно d. Найдите объем пирамиды.

VI.6. Вычислите объем: а) правильного октаэдра; б) правильного икосаэдра; в) правильного додекаэдра, если ребро этого многогранника равно 1.

VI.7. На правильном треугольнике по одну сторону от него как на основании построены три пирамиды с высотой, равной стороне треугольника. Какую часть от объема одной пирамиды составляет объем их пересечения, если вершины пирамид проектируются: а) в вершины треугольника; б) в середины сторон треугольника?

VI.8. Дан треугольник ABC площадью S. Через точку A провели перпендикуляр AK к плоскости ABC длиной d_1, а через середину L стороны BC провели перпендикуляр LM к плоскости ABC длиной d_2. Оба перпендикуляра лежат по одну сторону от (ABC). Найдите объем многогранника $ABCKL$. Изменится ли результат, если точка L не будет серединой стороны BC?

VI.9. В кубе расположено шесть пирамид. Вершина каждой из них находится в центре одной из граней, а основание каждой совпадает с гранью куба, параллельной той, где взята вершина. Какую часть от объема куба составляет объем пересечения этих пирамид?

VI.10. Дан правильный тетраэдр $KLMN$. На его высоте KA лежит диагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем ребро CD лежит в одной из боковых граней тетраэдра. а) Умещается ли куб внутри тетраэдра? б) Найдите отношение объема куба к объему тетраэдра.

VI.11. Дана правильная треугольная призма. На двух скрещивающихся диагоналях ее боковых граней находятся вершины правильного тетраэдра. Найдите отношение объема тетраэдра к объему призмы.

VI.12. Два шара радиусами R_1 и R_2 пересекаются. Найдите объем их общей части, если расстояние между их центрами равно d.

Ищем границы

VI.13. Основанием прямой призмы является пятиугольник, в котором три последовательных угла прямые и два равные тупые. Длины всех ребер известны. Из нее хотят вырезать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема. Основание его лежит в основании призмы. Как это сделать?

VI.14. Из куба вам требуется сделать правильную пирамиду наибольшего объема. Как вы будете действовать, если нужна пирамида: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная?

VI.15. Дан куб с ребром 1. Вычислите наибольший объем цилиндра, расположенного в кубе так, что его ось проходит через центр куба и параллельна диагонали его грани.

VI.16. Дан полушар. Какую часть от его объема составляет наибольший объем находящихся в нем: а) прямоугольного параллелепипеда; б) правильной треугольной призмы; в) правильной четырехугольной пирамиды; г) цилиндра; д) конуса?

VI.17. Рассмотрим конус с образующей 1. Чему равен наибольший объем расположенных в нем: а) прямоугольного параллелепипеда; б) правильной треугольной призмы; в) правильной треугольной пирамиды; г) цилиндра; д) шара; е) конуса; ж) полушара?

VI.18. Дан шар радиусом 1. Чему равен наибольший объем расположенного в нем: а) тела, являющегося объединением цилиндра и конуса с общим основанием; б) тела, являющегося объединением двух конусов с общим основанием?

Исследуем

VI.19. Дан правильный тетраэдр с ребром 1. а) Найдите различные варианты укладки четырех равных шаров внутри его. В каком из них суммарный объем этих шаров будет наибольшим? б) Сможете ли вы найти укладку пяти равных шаров с большим суммарным объемом? в) Сколько равных шаров надо уложить, чтобы их суммарный объем составлял 99% от объема тетраэдра?

VI.20. Известны объемы вписанного и описанного шаров для: а) цилиндра; б) конуса; в) усеченного конуса; г) прямоугольного параллелепипеда; д) правильной треугольной призмы; е) правильной n-угольной пирамиды. Можно ли по этим данным найти объемы самих тел?

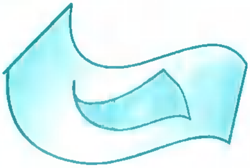
VI.21. Можно ли в каком-нибудь цилиндре объемом 2 разместить шар объемом 1? А два шара объемом 1?

Прикладная геометрия

VI.22. Дан шар объемом V. Можно ли его уместить в таком теле объемом $2V$: а) кубе; б) прямоугольном параллелепипеде; в) правильной треугольной призме; г) правильном тетраэдре; д) правильной четырехугольной пирамиде; е) цилиндре; ж) конусе; з) усеченном конусе?

VI.23. В стеклянный кубический сосуд надо налить воды так, чтобы ее объем составлял $\frac{2}{3}$ объема сосуда. Как это сделать, ничего не измеряя?

VI.24. Корыто имеет форму полуцилиндра. Его емкость V, толщина стенок h, плотность материала, из которого оно сделано, γ. Какими надо выбрать его размеры, чтобы масса была наименьшей?



Поверхности

§ 31. Геометрия на поверхности

31.1. О понятии поверхности

Мы рассматривали **поверхность** в основном как границу тела, но это совершенно не обязательно: сферу, цилиндрические, конические, любые многогранные поверхности можно рассматривать самостоятельно.

В практике сплошь и рядом встречаются такие вещи, как листы бумаги, части одежды, консервные банки и др., настолько малой толщины, что их можно считать протяженными только в двух измерениях, как поверхности тел. Такие вещи и служат реальными поверхностями или моделями геометрических поверхностей.

Это наглядное представление и лежит в основе того, как чаще всего определяют поверхность в геометрии. Сейчас мы изложим это определение, но и без него вы можете составить представление о поверхностях как о тонких пленках (идеально «толщиной» в одну точку).

Простейшими поверхностями являются многоугольники и плоские области. Простой поверхностью можно назвать фигуру, которая получается из плоской области в результате какой-либо ее деформации (взаимно однозначного, непрерывного отображения, рис. 127). Поверхностью будет любая фигура, составленная из таких простых поверхностей, подобно тому как многогранная поверхность составляется из многоугольников (рис. 128).

Словом, поверхности «склеиваются» из кусков, каждый из которых получается деформацией плоской области, совсем как портной шьет одежду из кусков материи. Число «склеиваемых» кусков может быть и бесконечным. Простейший пример из геометрии: поверхность цилиндра «сшивается» из оснований и боковой поверхности, которая сама может быть получена из прямоугольника, если его согнуть в трубку и склеить

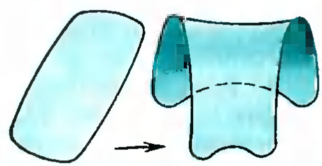


Рис. 127

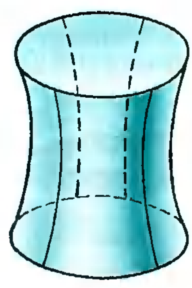


Рис. 128

края. Примерами могут служить также развертки многогранных поверхностей, здесь деформации плоских многоугольников сводятся к их сгибаниям по отрезкам.

Двугранные и многогранные углы тоже являются примерами поверхностей.

31.2. Двусторонние и односторонние поверхности

Интересно, что даже из простейшей поверхности — прямоугольника — можно склеить поверхность, обладающую неожиданными свойствами. Удивительно, что о таких свойствах геометры не знали вплоть до середины XIX в., пока эти свойства не обнаружил немецкий геометр Август Мёбиус (1790—1868). Он склеил из прямоугольника *ABCD* не обычную цилиндрическую поверхность *F* (рис. 129), склеивая отрезки *AB* и *DC* так, чтобы совпали точки *A* и *D*, а также точки *B* и *C*, а другую поверхность, которую теперь называют «лентой Мёбиуса» или «листом Мёбиуса». Она из прямоугольника *ABCD* получается так.

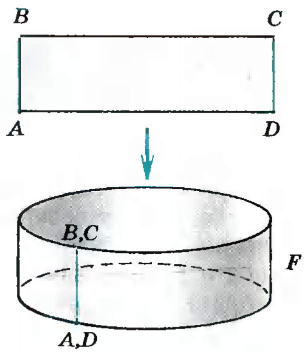


Рис. 129

Возьмите прямоугольную бумажную ленту *ABCD* и перекрутите ее в середине один раз (рис. 130). Теперь склейте отрезки *AB* и *CD*, совместив точку *A* с точкой *C*, а точку *B* с точкой *D* (рис. 131). Эта поверхность Ф и называется «лентой Мёбиуса».

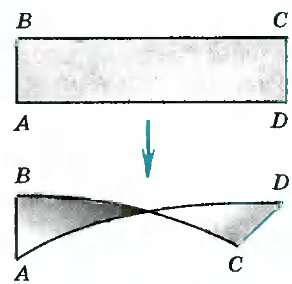


Рис. 130

Сравним ее свойства со свойствами цилиндрической поверхности *F*.

1) Край поверхности *F* состоит из двух замкнутых кривых L_1 и L_2 (рис. 132, *а*). Одна из них получилась из стороны *AD*, а другая — из стороны *BC*. Край же «ленты Мёбиуса» состоит из одной замкнутой кривой. Эта кривая Λ получается склеиванием отрезка *AB* с отрезком *CD*: точку *A* склеивают с точкой *C*, а точку *D* — с точкой *B* (рис. 132, *б*). Итак, *край «ленты Мёбиуса» состоит из одной замкнутой кривой.*

2) У цилиндрической поверхности *F*, как и у прямоугольника *ABCD*, две стороны (назовем их внешней

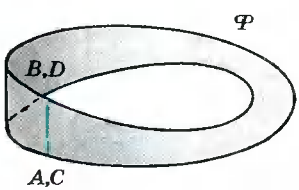


Рис. 131

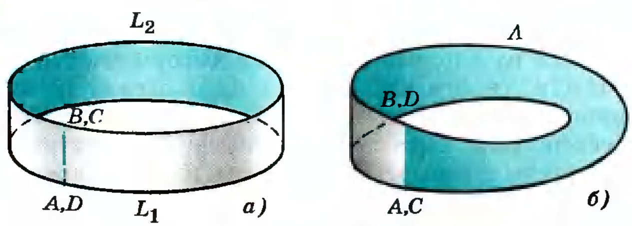


Рис. 132

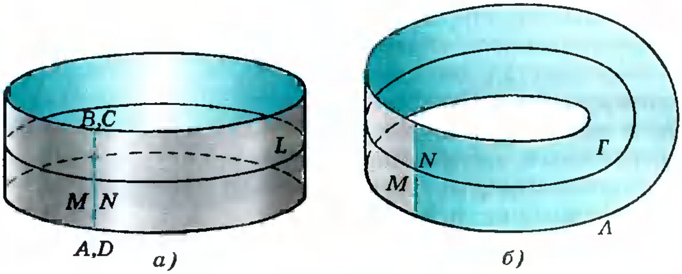


Рис. 133

и внутренней). Их можно окрасить двумя различными цветами. Эти цвета прилегают друг к другу лишь вдоль граничных кривых L_1 и L_2. У «ленты Мёбиуса» лишь одна сторона: перекрутив прямоугольник $ABCD$, мы «состыковали» вдоль склеенных отрезков AB и CD две стороны прямоугольника $ABCD$ в одну сторону «ленты Мёбиуса». Ее всю можно закрасить лишь одной краской. Проверьте это, закрашивая бумажную «ленту Мёбиуса» карандашом или фломастером. *Итак, «лента Мёбиуса» — односторонняя поверхность.*

3) Назовем средними линиями поверхностей F и Ф кривые L и $Г$, полученные на этих поверхностях склеиванием средней линии MN прямоугольника $ABCD$ в точках M и N (рис. 133). Если разрезать по средней линии поверхность F, то получим две поверхности F_1 и F_2 (рис. 134, *а*). Это означает, что у средней линии L на поверхности F два «берега»: перейти с одного «берега» на другой можно лишь пересекая среднюю линию L. Один из «берегов» остался на поверхности F_1, а другой — на поверхности F_2. Если же разрезать по средней линии $Г$ «ленту Мёбиуса», то снова получим лишь одну поверхность (рис. 134, *б*). (Проверьте это, а затем еще раз разрежьте получившуюся из «ленты Мёбиуса» поверхность по средней линии: результат будет весьма неожиданным.)

То, что после разрезания по средней линии $Г$ поверхность Ф не распалась, говорит о том, что у кривой $Г$ на Ф лишь один «берег». Если взять на Ф две близкие точки P и Q, казалось бы, с разных сторон от $Г$, то их тем не менее можно соединить кривой, не пересекающей кривую $Г$ (рис. 135). Итак, *на «ленте Мёбиуса» имеются «однобережные кривые».*

Этими удивительными свойствами «ленты Мёбиуса» обладают и другие более сложные поверхности. Их называют **односторонними или неориентируемыми**. На каждой такой поверхности некоторая ее часть яв-

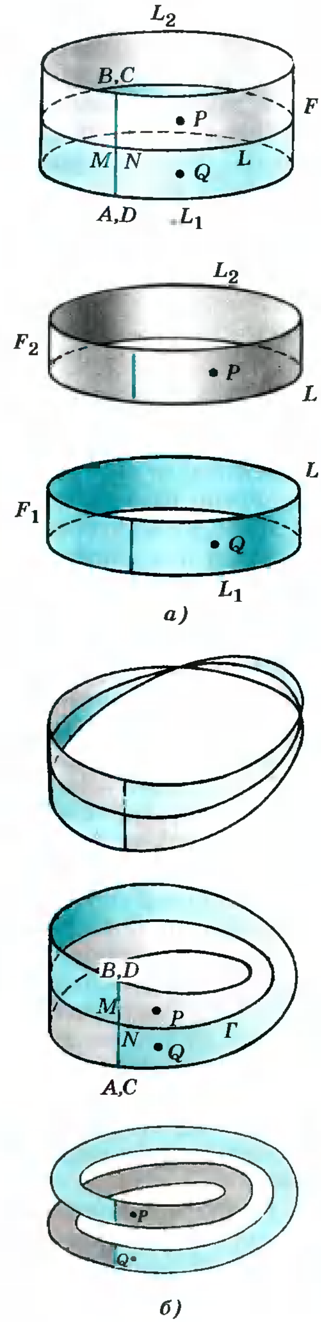


Рис. 134

ляется «лентой Мёбиуса». Те же поверхности, с которыми мы встречались до сих пор (плоскость, сфера, выпуклые многогранные поверхности и т. д.), называются **двусторонними или ориентируемыми.**

Все свойства поверхностей, о которых здесь рассказывалось, являются топологическими свойствами поверхностей: они сохраняются при взаимно однозначных и взаимно непрерывных деформациях поверхностей.

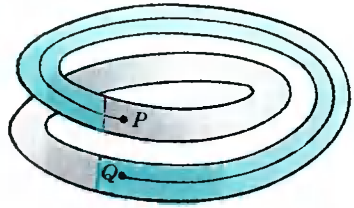


Рис. 135

31.3*. Внутренняя геометрия поверхности

Планиметрия — это геометрия на плоскости, и, занимаясь ею, рассматривают плоскость саму по себе, отвлекаясь от окружающего пространства. Точно так же можно изучать геометрию на любой поверхности: на сфере, на многогранной поверхности, на поверхности цилиндра или конуса и т. п.

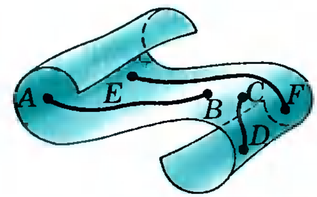


Рис. 136

Представим себе какую-нибудь поверхность. Будем измерять расстояние между ее точками по самой поверхности — по линии кратчайшей длины от одной точки до другой (рис. 136). Такие линии, их будем называть **кратчайшими**, играют на поверхности роль прямолинейных отрезков.

Можно, например, определить треугольник как фигуру из трех кратчайших AB, BC, AC (не имеющих других общих точек, кроме концов) или как часть поверхности, ограниченной такими кратчайшими (рис. 137).

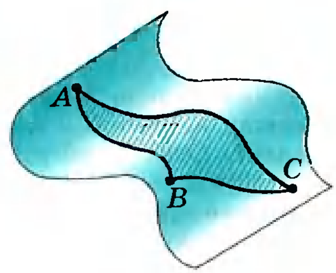


Рис. 137

Можно определить окружность: окружностью с центром O и радиусом r называется множество точек, удаленных от O на расстояние r; совсем как на плоскости, только теперь имеются в виду точки данной поверхности и расстояния, измеренные на поверхности (рис. 138). Радиусом окружности называют также кратчайшую от центра до точки на окружности.

Можно определить длину окружности и вообще любой линии как предел длин вписанных ломаных, составленных из кратчайших (рис. 139). Можно определить угол между кратчайшими, но мы сделаем это чуть позже.

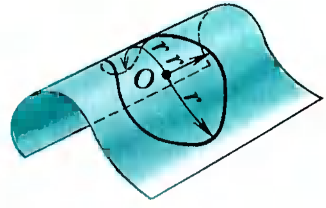


Рис. 138

В общем возникает возможность развивать геометрию на данной поверхности в принципе ничуть не хуже, чем на плоскости. Эта геометрия на поверхности называется ее **внутренней геометрией.**

Докажите первую основную теорему внутренней геометрии поверхностей.

Теорема 31.1

Расстояние на поверхности обладает обычными свойствами: во-первых, оно неотрицательно и обращается в нуль тогда и только тогда, когда точки совпадают; во-вторых, оно симметрично и, наконец, в-третьих, для него имеет место неравенство треугольника.

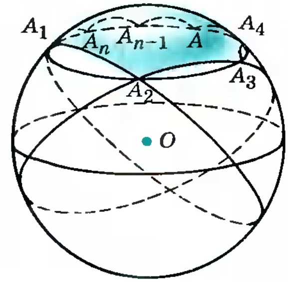


Рис. 139

Угол между двумя кривыми на поверхности, исходящими из одной точки (рис. 140), определяется обычно как угол между касательными к этим кривым в этой точке (если эти касательные существуют). При этом **касательная прямая** к кривой (или, короче, касательная) определяется как предел секущих. (Подробнее. Пусть M — некоторая точка кривой L и N — близкая к M точка кривой L (рис. 141). Прямая MN называется секущей. Если секущая MN при стремлении точки N по кривой L к точке M стремится (сходится) к некоторой прямой l (т. е. угол между l и (MN) стремится к нулю), то эта прямая l называется касательной к кривой L в точке M.) Но касательные, вообще говоря, не лежат на поверхности и, значит, не относятся к ее внутренней геометрии. Стало быть, величину угла надо определить во внутренней геометрии иначе.

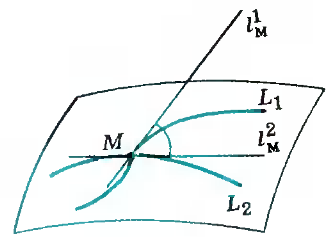


Рис. 140

Один из возможных способов таков. На плоскости угол можно измерить как отношение длины l дуги окружности, для которой данный угол центральный, к радиусу r этой окружности: это отношение не зависит от радиуса, так как длина дуги окружности пропорциональна радиусу. На произвольной поверхности это не так. Поэтому величину угла φ разумно определить как предел отношения длины дуги окружности l к ее радиусу r, когда $r \to 0$ (естественно, если этот предел существует): $\varphi = \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{l}{r}$.

Площадь фигур на поверхности также относится к внутренней геометрии поверхности, но определяется сложно. Мы рассмотрим вопрос о площади самых простых поверхностей в следующем параграфе, используя не только внутреннегеометрические построения.

Две поверхности называются **изометричными**, если между точками этих поверхностей можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие кривые на этих поверхностях имеют одинаковые длины. Если две поверхности изометричны, то про каждую из них говорят, что она получена **изгибанием** другой поверхности.

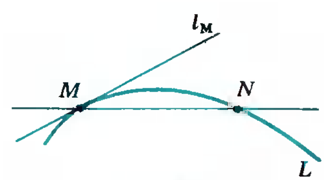


Рис. 141

Другими словами, **изгибание поверхности — это такая ее деформация, при которой длины кривых на поверхности не изменяются.**

Примерами изометричных поверхностей являются, например, плоскость и двугранный угол или многогранный угол и бесконечная коническая поверхность, у которых полные углы вокруг вершин равны. Легко представить себе непрерывные деформации — изгибание каждой из этих поверхностей в изометричную ей.

Реальные изгибания — это деформация тонких, но нерастягивающихся материалов, без разрывов и склеиваний, например листов бумаги или металла. Так, например, прямоугольник можно изогнуть в боковую поверхность цилиндра, а круговой сектор — в боковую поверхность конуса (рис. 142), считая, что они разрезаны по одной из образующих. Этот сектор и этот прямоугольник называют **развертками** боковых поверхностей конуса и цилиндра соответственно.

Так как изгибание не меняет расстояний на поверхности, то ***при изгибании поверхности ее внутренняя геометрия не изменяется.*** Так, например, внутренняя геометрия двугранного угла — это обычная евклидова планиметрия.

Поэтому *на внутреннюю геометрию поверхности можно смотреть как на совокупность свойств поверхности, не меняющихся при ее изгибании.*

Возможность или невозможность изгибаний при сохранении тех или иных дополнительных свойств поверхностей имеет важные практические применения. Например, теорема А. В. Погорелова о неизгибаемости замкнутых выпуклых поверхностей при условии, что сохраняется выпуклость поверхности, нашла свои применения в теории оболочек.

Прочность сферических оболочек батискафов или подводных лодок, даже просто скорлупы яиц — все это реальные примеры теоремы о неизгибаемости замкнутых выпуклых поверхностей.

О внутренней геометрии важнейшей после плоскости поверхности — сферы — будет подробно рассказано в § 33.

Внутренняя геометрия поверхностей может быть очень разнообразной.

Основы внутренней геометрии поверхностей были раскрыты великим немецким математиком Карлом Гауссом (1777—1855) в работе 1828 г., но несколько иначе, чем здесь изложены. Такой более общий подход и более общая теория были развиты советскими геометрами во второй половине XX в.

Карл Гаусс

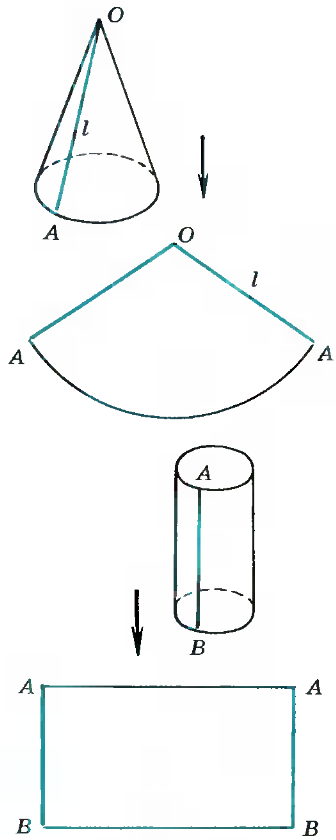


Рис. 142

§ 32. Площадь поверхности

32.1. О понятии площади поверхности

Площадь поверхности многогранника естественно считается равной сумме площадей его граней. Вопрос состоит в определении площади искривленной поверхности, например сферы или некоторых ее частей, боковых поверхностей цилиндра и конуса.

Напомним, что под поверхностью мы понимаем границу тела или ее часть (область на границе тела). Соответственно выпуклая поверхность — это граница выпуклого тела или ее часть, а многогранная поверхность — это граница многогранника или ее часть, состоящая из многоугольников.

Площадь поверхности на практике определяют так. Разбивают поверхность на такие куски, которые уже мало отличаются от плоских. Тогда находят площади этих кусков, как если бы они были плоскими. Например, можно заменить их проекциями на некоторые плоскости, от которых поверхность мало отклоняется (если поверхность выпуклая, то на опорные плоскости). Сумма их площадей и дает приближенно площадь поверхности. Например, площадь поверхности купола получается как сумма площадей покрывающих его кусков листового металла (рис. 143). Еще лучше это видно на примере земной поверхности. Она искривлена, примерно сферическая. Но участки, небольшие в сравнении с размерами всей Земли, измеряют как плоские.

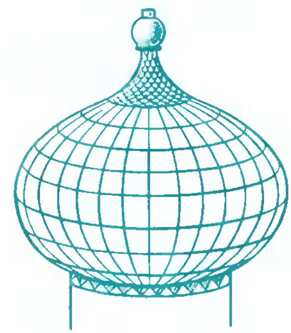


Рис. 143

В математической теории — в геометрии добавляют условие, что куски безгранично измельчаются, и берут предел сумм площадей их проекций.

32.2. Описанные многогранники и определение площади выпуклой поверхности

Для выпуклых поверхностей можно применить другой способ определения их площади. Он состоит в том, что вокруг выпуклой поверхности описывают близкую к ней многогранную поверхность. Ее грани будут приближенно представлять куски выпуклой поверхности, а ее площадь даст приближенно площадь самой искривленной выпуклой поверхности. При этом **многогранная поверхность называется описанной вокруг**

выпуклой поверхности, если ее грани лежат в опорных плоскостях данной выпуклой поверхности и она располагается по ту же сторону от каждой такой плоскости, что и данная поверхность.

Многогранник же называется описанным вокруг выпуклого тела, если его поверхность описана вокруг поверхности выпуклого тела.

Теперь можно дать следующее определение.

Определение

Площадью выпуклой поверхности называется предел площадей описанных вокруг нее многогранных поверхностей при условии, что все точки этих многогранных поверхностей становятся сколь угодно близкими к данной выпуклой поверхности.

В следующих пунктах этого параграфа вычисляются площади простейших выпуклых поверхностей. При этом вычисление площади сферы основано на следующем интересном предложении:

Лемма 32.1

Объем $V(P)$ многогранника P, описанного вокруг шара радиусом R, и площадь $S(P)$ его поверхности связаны соотношением

$$V(P)=\frac{1}{3}S(P)R. \qquad (32.1)$$

Доказательство. Опишем вокруг сферы какой-либо многогранник P. Разобьем его на пирамиды T_Q с общей вершиной в центре O и с гранями Q многогранника P в основаниях (рис. 144).

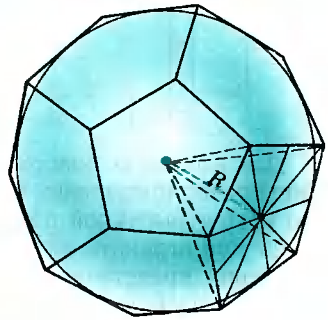


Рис. 144

Каждая такая грань Q лежит в опорной плоскости сферы и, значит, перпендикулярна радиусу сферы в точке касания. Стало быть, этот радиус есть высота пирамиды T_Q. Потому ее объем будет:

$$V(T_Q)=\frac{1}{3}S(Q)R,$$

где $S(Q)$ — площадь грани Q. Сумма этих площадей дает площадь поверхности многогранника $S(P)$, а сумма объемов пирамид T_Q — его объем $V(P)$. Поэтому $V(P)=\frac{1}{3}S(P)R$. ■

32.3. Площадь сферы

Теорема 32.1

Площадь сферы радиусом R выражается формулой

$$\boldsymbol{S=4\pi R^2}. \qquad (32.2)$$

Доказательство. Пусть дан шар U радиусом R. Возьмем на его сфере n точек, не лежащих в одной полусфере, и проведем через них опорные плоскости к шару. Эти плоскости ограничат многогранник P_n, описанный вокруг шара U. Будем увеличивать число выбранных точек и брать их все гуще и гуще. Например, возьмем достаточно густую сеть из параллелей и меридианов и выберем точки их пересечения. Тогда поверхности многогранников P_n будут приближаться к данной сфере. Объемы $V(P_n)$ будут стремиться к объему шара U, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} V(P_n)=\frac{4}{3}\pi R^3, \qquad (32.3)$$

а согласно определению площади выпуклой поверхности их площади $S(P_n)$ стремятся к площади S данной сферы, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} S(P_n)=S. \qquad (32.4)$$

Но по лемме 32.1

$$V(P_n)=\frac{1}{3}S(P_n)R. \qquad (32.5)$$

Переходя в (32.5) к пределу и используя (32.3) и (32.4), получаем:

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{3}SR, \qquad (32.6)$$

откуда следует, что $S=4\pi R^2$. ■

32.4. Площадь части сферы

Рассмотрим какую-либо сферу и на ней фигуру F. Назовем шаровым сектором с основанием F фигуру, образованную радиусами, проведенными во все точки фигуры F (рис. 145).

Теорема 32.2

Площадь S области на сфере радиусом R и объем шарового сектора, основанием которого служит данная область, связаны формулой

$$V=\frac{1}{3}SR. \qquad (32.7)$$

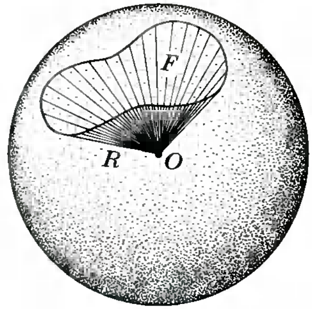


Рис. 145

Доказательство. Пусть на сфере дана фигура F, и пусть U — шаровой сектор с основанием F. Опишем вокруг шара многогранник и вырежем из него «сектор» пирамидой с вершиной в центре шара, заключающей шаровой сектор U. Если S_P — площадь поверхности, вырезанной из поверхности многогранника, а V_P — объем, то, так же как в лемме, $V_P=\frac{1}{3}S_PR$.

Поэтому в пределе, когда $V_P \to V$ и $S_P \to S$, получаем формулу (32.7). ■

Зная эту формулу, можно находить площади некоторых частей сферы.

Замечание. Величина угла на плоскости служит мерой множества лучей, исходящих из вершины угла, или, что равносильно, мерой множества соответствующих направлений. Аналогично мерой множества лучей, исходящих из одной точки в пространстве (или, что равносильно, мерой множества направлений), служит так называемый телесный угол.

Рассмотрим какой-либо конус лучей — множество лучей, исходящих из одной точки O; этот конус пересекает единичную сферу (т. е. сферу радиусом 1) с центром O по некоторой фигуре F. Площадь этой фигуры и принимается за меру данного множества лучей. Соответственно телесный угол конуса измеряется площадью фигуры, по которой конус пересекает единичную сферу с центром в вершине конуса.

Как полный угол вокруг точки на плоскости равен 2π, так полный телесный угол равен 4π, и как угол с дуговой мерой 1 называется радианом, так телесный угол мерой 1 называется **стерадианом** (стерео-радиан, от греческого «стереос» — телесный).

Понятие телесного угла как меры множества лучей важно, например, в оптике.

Площадь фигуры, вырезаемой на сфере данным конусом лучей с вершиной в центре сферы и телесным углом ω, равна $S=\omega R^2$. Объем же соответствующего сектора $V=\frac{1}{3}\omega R^3$.

32.5. Площадь поверхности конуса и цилиндра

Теорема 32.3

Площадь боковой поверхности цилиндра вращения с высотой H и радиусом основания R выражается формулой

$$S=2\pi RH. \qquad (32.8)$$

Доказательство. Пусть дан цилиндр вращения C с высотой H и радиусом основания R (рис. 146). Опишем вокруг C правильную n-угольную призму. Ее высота тоже равна H, а основаниями будут правильные n-угольники, описанные вокруг оснований цилиндра C.

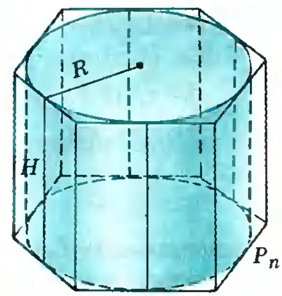


Рис. 146

Очевидно, что площадь S_n боковой поверхности призмы выражается равенством

$$S_n=P_nH, \qquad (32.9)$$

где P_n — периметр основания призмы. Перейдем в равенстве (32.9) к пределу при $n\to\infty$. Периметры P_n сходятся к длине окружности основания цилиндра C, т. е. к $2\pi R$. А площади S_n сходятся к S. Поэтому $S=2\pi RH$, что и требовалось доказать.

Теорема 32.4

Площадь боковой поверхности конуса вращения с образующей L и радиусом основания R выражается формулой

$$S=\pi RL. \qquad (32.10)$$

Доказательство. Пусть дан конус вращения K с образующей L и радиусом основания R (рис. 147). Опишем вокруг K правильную n-угольную пирамиду. Высоты ее боковых граней будут равны L (по теореме о трех перпендикулярах), а основанием будет правильный n-угольник, описанный вокруг основания конуса K. Поэтому площадь боковой поверхности S_n пирамиды выражается формулой

$$S_n=\frac{1}{2}P_nL, \qquad (32.11)$$

где P_n — периметр основания пирамиды.

Перейдем к пределу в (32.11) при $n\to\infty$. Периметры P_n сходятся к длине окружности основания конуса K, т. е. к $2\pi R$. А площади S_n сходятся к S. Поэтому $S=\pi RL$, что и требовалось доказать.

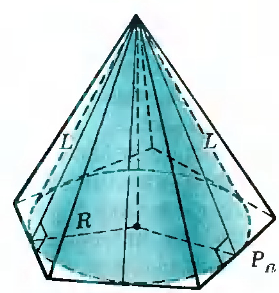


Рис. 147

Следствие

Площадь боковой поверхности усеченного конуса вращения с радиусами оснований R и r и длиной образующей L выражается формулой

$$S = \pi (R + r) L. \qquad (32.12)$$

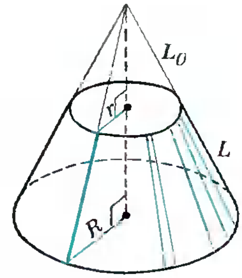


Рис. 148

Действительно, площадь боковой поверхности усеченного конуса вращения получается как разность площадей боковых поверхностей конусов вращения с образующими $L+L_0$ и L_0 и радиусами оснований R и r (рис. 148). Поэтому

$$S = \pi R (L + L_0) - \pi r L_0 = \pi R L + \pi L_0 (R - r).$$

Но из подобия прямоугольных треугольников имеем:

$$\frac{L_0}{r} = \frac{L}{R - r}.$$

Следовательно, $L_0(R-r)=rL$, т. е. $S=\pi(R+r)L$, что и требовалось доказать.

Замечание. Формулы (32.8) и (32.10) являются частными случаями формулы (32.12): при $r=R$ получаем формулу (32.8), а при $r=0$ получаем формулу (32.10).

Дополнение к параграфу 32

Еще об определении площади поверхности

Если сравнить определения двух аналогичных понятий — длины кривой и площади поверхности, то можно заметить существенные различия в этих определениях. Длина кривой определяется как предел длин ломаных, вписанных в эту кривую, при условии, что длины всех звеньев ломаных стремятся к нулю. Казалось бы, что площадь поверхности можно было бы определить как предел площадей многогранников, вписанных в соответствующую поверхность, при условии, что все грани этих многогранников становятся сколь угодно мелкими. Но оказывается, что такое определение площади поверхности невозможно даже для такой простейшей поверхности, как боковая поверхность цилиндра вращения. Даже в такую поверхность многогранники можно вписать так, что либо предела не будет, либо в пределе получится сколь угодно большое число. Соответствующий пример был построен в середине XIX в. немецким математиком Г. Шварцем. Приведем этот пример.

Возьмем цилиндр вращения C с высотой H и радиусом основания R. Его боковую поверхность разобьем на m равных частей окружностями, равными окружностям оснований (рис. 149). В каждую из этих окружностей впишем правильный n-угольник так, чтобы вершины соседних многоугольников были вершинами антипризмы (см. п. 26.6). Объединение боковых поверхностей этих m стоящих друг на друге антипризм и будет многогранной поверхностью P_{mn}, вписанной в боковую поверхность цилиндра C. Поверхность P_{mn} состоит из $2mn$ равных треугольников. Нетрудно подсчитать площадь $s(T_i)$ одного такого треугольника T_i (рис. 150):

$$s(T_i)=BD\cdot AD=R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{m^2}+\left(R-R\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}=$$

$$=R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{m^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

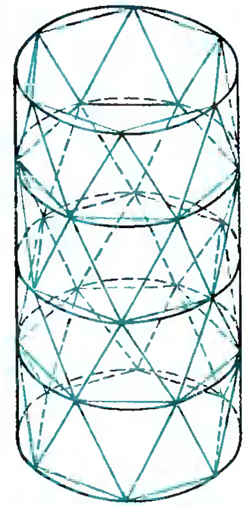


Рис. 149

Тогда площадь всей поверхности P_{mn} выражается равенством

$$s(P_{mn})=2mnR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{m^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

И если отношение $\frac{m}{n^2}$ не стремится к нулю при $m\to\infty$ и $n\to\infty$ (т. е. когда плоскости граней треугольников T_i не становятся в пределе вертикальными), то площади $s(P_{mn})$ не сходятся к пределу $2\pi RH$, а могут сходиться к любому числу, большему $2\pi RH$, или вообще не иметь предела. Ясно, что это происходит из-за того, что многогранники R_{mn} как бы «гофрированы», и, хотя они сами приближаются к боковой поверхности цилиндра, их площади не сходятся к ее площади.

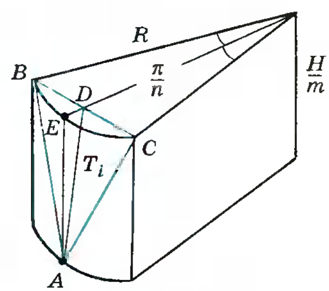


Рис. 150

Пример Шварца показывает, что определять площадь поверхности просто как предел площадей поверхностей многогранников, вписанных в эту поверхность и сходящихся к ней, нельзя.

Задачи

Разбираемся в решении

32.1.(4). На Земле находятся два круглых озера. Длина окружности одного из них в два раза больше длины окружности другого. Во сколько раз одно из них имеет бо́льшую площадь поверхности, чем другое?

Решение

Пусть радиусы окружностей этих озер — r_1 и r_2, высоты соответствующих сферических сегментов — h_1 и h_2, а радиус Земли — R.

Так как отношение длин окружностей этих озер равно 2, то $r_1 : r_2 = 2$. Площадь сферического сегмента равна $2\pi RH$, где R — радиус сферы, а H — его высота, следовательно, отношение площадей сегментов равно отношению их высот, в данном случае $S_1 : S_2 = h_1 : h_2$. Задача свелась к тому, что, зная $r_1 : r_2$, требуется вычислить $h_1 : h_2$.

Выразим h_1 через R и r_1. Получим такую зависимость между этими величинами: $r_1^2 = h_1(2R - h_1)$ (?), откуда $h_1 = R - \sqrt{R^2 - r_1^2}$ (?).

Аналогично $h_2 = R - \sqrt{R^2 - r_2^2}$. Поэтому $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{R - \sqrt{R^2 - r_1^2}}{R - \sqrt{R^2 - r_2^2}}$. Однако совершенно непонятно, как это довести до числа.

Используем тригонометрию. Пусть угол между радиусом Земли, проходящим через центр первого озера, и радиусом Земли, проведенным в точку на его границе, равен φ_1. Для второго озера этот угол обозначим φ_2. Так как $r_1 = R \sin \varphi_1$ и $r_2 = R \sin \varphi_2$, то

$$\sin \varphi_1 : \sin \varphi_2 = 2. \qquad (1)$$

Так как $h_1 = R(1 - \cos \varphi_1)$ и $h_2 = R(1 - \cos \varphi_2)$, то

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1 - \cos \varphi_1}{1 - \cos \varphi_2} = \left(\frac{\sin \frac{\varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_2}{2}} \right)^2. \qquad (2)$$

И все равно непонятно, что делать дальше, если действовать, следуя привычной технике преобразований. Однако можно вспомнить, что наши сегменты — это озера, лежащие на Земле. Значит, углы φ_1 и φ_2 достаточно малы, а потому вместо синусов этих углов можно писать сами эти углы. Теперь ответ получается сразу же. Из (1) получаем, что $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = 2$. Отсюда ответ:

$$S_1 : S_2 = 4.$$

Любопытно, однако, что тот же результат можно получить гораздо быстрее. Как?

Дополняем теорию

32.2.(1). Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания и высоты.

32.3.(1). Докажите, что площадь боковой поверхности любой призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения и бокового ребра.

32.4.(1). Докажите, что площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания и апофемы.

32.5.(4). Выведите формулу $S=2\pi RH$ площади таких частей сферы: а) сферического сегмента; б) сферического пояса. (Здесь S — площадь части сферы, R — радиус сферы, H — высота сегмента или пояса. **Сферический сегмент** — это часть шарового сегмента, лежащая на сфере. **Сферический пояс** — это часть шарового пояса, лежащая на сфере.)

Планируем

32.6.(1). В основании пирамиды ромб, все ее грани равнонаклонены к основанию. Какие надо сделать замеры на ее поверхности, чтобы вычислить ее площадь?

32.7.(1). Какие замеры надо сделать на проекциях многогранника, чтобы вычислить площадь его поверхности (рис. 151)?

32.8.(4). В шаре радиусом R рассмотрим шаровой пояс, у которого радиусы кругов R_1 и R_2. Как найти площадь его сферической поверхности и объем?

32.9.(4). Какие вы сделаете замеры на поверхности шарового сегмента, чтобы вычислить площадь его поверхности и объем? А на поверхности шарового пояса?

32.10.(5). Из двух равных цилиндров сделали такое тело, как на рисунке 152. Как вы найдете площадь его поверхности?

32.11.(5). Тело задано двумя проекциями (рис. 153). Какие надо сделать замеры на этих проекциях, чтобы вычислить площадь его поверхности; чтобы вычислить его объем?

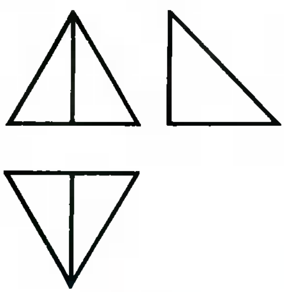


Рис. 151

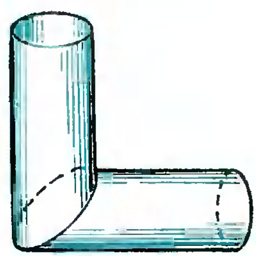


Рис. 152

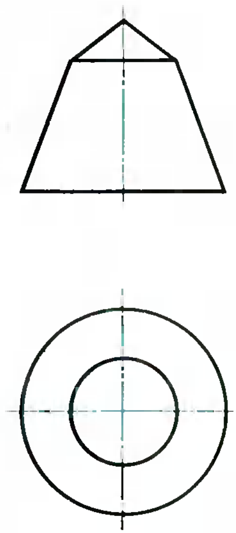


Рис. 153

Находим величину

32.12.(1). Куб разрезали на n^3 кубиков, равных между собой. Во сколько раз общая площадь поверхности полученных кубиков больше площади поверхности данного куба?

32.13.(1). В основании параллелепипеда лежит квадрат со стороной d_1. Одна из вершин верхнего основания проектируется в центр нижнего основания. Боковое ребро параллелепипеда равно d_2. Найдите площадь его боковой поверхности.

32.14.(1). Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма. Ребро основания равно 1, а высота равна 2. Через (AC) проведено сечение под углом φ к основанию. Найдите площадь поверхности образовавшихся частей призмы.

32.15.(1). В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ треугольник со сторонами 10, 10, 12, $|A_1A|=|A_1B|=|A_1C|=13$. Вычислите площадь поверхности призмы.

32.16.(1). В основании тетраэдра $PABC$ равнобедренный треугольник ABC. $(AB=AC)$, $(PB)\perp(ABC)$. Точка X лежит на ребре BC, причем $(PX)\perp(AX)$. Вычислите отношение площадей поверхностей пирамид $XAPC$ и $XAPB$.

32.17.(1). Две плоскости проводятся параллельно одной из граней тетраэдра. Одна делит пополам площадь поверхности, другая — объем. Какая из них ближе к указанной грани?

32.18.(1). В тетраэдре $PABC$ $|AB|=1$, $|PB|=2$, $|PC|=3$. Объем тетраэдра равен 1. Вычислите площадь поверхности этого тетраэдра.

32.19.(1). В правильной n-угольной пирамиде все грани, включая основание, равновелики. Ее высота равна H. Найдите ее объем и площадь поверхности.

32.20.(1). В правильной n-угольной усеченной пирамиде стороны оснований равны d_1 и d_2. Найдите площадь ее боковой поверхности, если: а) боковое ребро равно d_3; б) угол бокового ребра с основанием равен φ; в) угол между боковой гранью и основанием равен φ; г) высота равна h.

32.21.(2). Вычислите радиус сферы, вписанной в: а) правильный тетраэдр с ребром d; б) правильный октаэдр с ребром d; в) правильную n-угольную пирамиду с известными ребрами; г) правильную n-угольную призму с известными ребрами; д) треугольную пирамиду, основанием которой является равносторонний треугольник со стороной d_1, а одно из боковых ребер, равное d_2, перпендикулярно основанию; е) треугольную пирамиду, основанием которой является равнобедренный треугольник, две стороны которого равны d, а угол между ними равен φ и в которой высота, равная h, проектируется в середину основания равнобедренного треугольника; ж) четырехугольную пирамиду, основанием которой является квадрат со стороной d, а высота, равная h, проектируется в: 1) вершину квадрата; 2) середину стороны квадрата; з) параллелепипед, все грани которого — ромбы со стороной d и острым углом φ при одной вершине; и) правильную n-угольную усеченную пирамиду с известными ребрами.

32.22.(4). Площадь сферической поверхности полушара равна S. Чему равна площадь поверхности всего полушара?

32.23.(4). Два шара радиусом R расположены так, что расстояние между их центрами равно $\frac{3}{2}R$. Найдите площадь поверхности и объем их пересечения.

32.24.(4). В вершине прямоугольного тетраэдра с боковым ребром, равным d, находится центр сферы радиусом $\frac{1}{2}d$. Какая часть площади сферы находится внутри тетраэдра?

32.25.(5). Оси двух конусов лежат на одной прямой, их основания находятся в одной плоскости, а сами они — по одну сторону от нее. Их боковые поверхности имеют общую окружность. Радиусы и высоты этих конусов известны. Найдите площадь поверхности их объединения.

32.26.(5). В шар радиусом R вписан конус, у которого плоскость основания удалена от центра шара на расстояние d. Найдите площадь поверхности конуса.

32.27.(5). Имеется цилиндр радиусом R и высотой H, а также тело, являющееся объединением двух равных усеченных конусов, у которых радиусы оснований R и $\frac{R}{2}$, а высота $\frac{1}{2}H$. Эти конусы имеют общее основание. Сравните боковые поверхности этих тел.

Ищем границы

32.28.(1). Имеются два равных прямоугольных параллелепипеда с ребрами 1, 2, 3. Как из них составить многогранник: а) с наибольшей площадью поверхности; б) с наименьшей площадью поверхности? (При составлении многогранника параллелепипеды прикладываются гранями или их частями.)

32.29.(1). Объем правильной треугольной призмы равен V. В каких границах находится площадь ее поверхности?

32.30.(1). В призме $ABCA_1B_1C_1$ $|AB|=|AC|=7$, $|BC|=6$, $|AA_1|=10$, $\angle A_1AB=\angle A_1AC$. Вычислите наибольшую площадь поверхности такой призмы.

32.31.(1). В прямой треугольной призме две боковые грани имеют площади S_1 и S_2. В каких границах лежит площадь ее боковой поверхности?

32.32.(1). Все плоские углы при вершинах A и B тетраэдра $PABC$ равны φ, $|AB|=d$. Найдите площадь поверхности тетраэдра. В каких границах она лежит?

32.33.(1). В тетраэдре $PABC$ $|PA|=|PB|=|BC|=|AC|=1$, $PC=AB$. Вычислите наибольшую площадь его поверхности. Решите задачу при условии, что $PC\neq AB$.

32.34.(1). В тетраэдре пять ребер имеют длину, равную 1. Вычислите наибольшее значение площади его поверхности.

32.35.(1). В каких границах находится площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды объемом V? Составьте обратную задачу. Сможете ли вы решить задачу для площади всей поверхности пирамиды?

32.36.(4). На сфере даны: а) 2 точки; б) 3 точки; в) 4 точки. Найдите сегмент наименьшей площади, накрывающей эти точки.

32.37.(5). Объем цилиндра равен V. В каких границах находится: а) площадь его поверхности; б) площадь его боковой поверхности?

32.38.(5). В каких границах лежат значения объема цилиндра, у которого известна: а) площадь поверхности; б) площадь боковой поверхности?

32.39.(5). Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник с диагональю d. Найдите наибольшее значение площади боковой поверхности цилиндра.

32.40.(5). Образующая конуса равна L. В каких границах находится: а) площадь его боковой поверхности; б) площадь его поверхности?

32.41.(5). Площадь боковой поверхности конуса равна S. При каком значении его радиуса достигает наибольшего и наименьшего значений: а) его объем; б) площадь его поверхности?

32.42.(5). Объем конуса равен V. При каком отношении образующей к диаметру основания достигает наибольшего и наименьшего значений: а) площадь его боковой поверхности; б) площадь его поверхности?

32.43.(5). Разверткой боковой поверхности конуса является сектор круга радиусом R. В каких границах находится: а) площадь его боковой поверхности; б) площадь его поверхности; в) его объем?

32.44.(5). Тело является объединением конуса и полушара. Они расположены так, что основание конуса совпадает с большим кругом полушара и других общих точек у них нет. Образующая конуса равна L. В каких границах лежит площадь поверхности этого тела?

Доказываем

32.45.(3). Докажите, что скорость изменения площади сферы пропорциональна ее радиусу.

Исследуем

32.46.(1). В треугольной призме известны расстояния между прямыми, которые проходят через ее боковые ребра, и длина бокового ребра. Можете ли вы по этим данным узнать: а) площадь ее боковой поверхности; б) площадь ее поверхности; в) ее объем?

32.47.(1). Известна площадь одной грани тетраэдра. Можно ли, измеряя только углы на его поверхности, найти площадь его поверхности?

32.48.(1). Дан прямоугольный тетраэдр. Достаточно ли знать длины трех его ребер, чтобы найти площадь его поверхности?

32.49.(1). Может ли внутри правильной призмы находиться одноименная правильная пирамида с большей площадью поверхности? А произвольная пирамида?

32.50.(1). Можете ли вы найти объем правильной n-угольной усеченной пирамиды, если известна площадь ее боковой поверхности и площадь каждого основания?

32.51.(1). Правильная n-угольная пирамида высотой H вписана в шар радиусом R. Найдите площадь ее поверхности. Докажите, что с ростом n она увеличивается. Будет ли увеличиваться площадь боковой поверхности такой пирамиды, если в основании находится многоугольник одного вида, а увеличивается H? А площадь поверхности?

32.52.(3). Можно ли внутри данного шара разместить некоторое число не пересекающихся, равных между собой сфер, суммарная площадь поверхности которых больше любой наперед заданной величины?

32.53.(3). Может ли внутри данного тела находиться шар с большей площадью поверхности? Каким могло бы быть доказательство? А может ли внутри шара находиться тело с большей площадью поверхности?

32.54.(3). Иногда площадь сферы определяют следующим образом. Берут сферу радиусом R и сферу радиусом $R+\Delta R$. Объем тела, заключенного между этими сферами, обозначают ΔV. Тогда площадь поверхности сферы определяют как $\lim\limits_{\Delta R \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta R}$. Каковы соображения, приводящие к такому определению? Каковы его достоинства и недостатки? Можно ли его применить для измерения других площадей?

32.55.(4). Существует ли в данном шаре такой шаровой сектор, у которого: а) площадь его сферической поверхности равна площади его конической поверхности; б) площадь его поверхности равна площади поверхности полушара?

32.56.(4). Сечение шара разделило его на две части, площади поверхности которых равны S_1 и S_2. Сможете ли вы найти площадь поверхности шара?

32.57.(4). На полусфере взяли два сферических пояса с одинаковой площадью поверхности. Равны ли объемы соответствующих шаровых поясов?

32.58.(4). От шара отсекли сегмент. Известно, какую часть составляет площадь его сферической поверхности от площади сферы. Можно ли узнать, какую часть составляет его объем от объема шара? Можно ли решить обратную задачу? Решите аналогичную задачу для шарового сектора.

32.59.(4). Точка X удалена на расстояние d от центра O данной сферы. Проводится сфера с центром X и радиусом d. Можете ли вы найти площадь части этой сферы, которая лежит внутри данной?

32.60.(4). Можно ли получить площадь поверхности частей сферы, следуя схеме, указанной в задаче 32.54?

32.61.(5). Известно, во сколько раз площадь поверхности усеченного конуса больше площади каждого из оснований и площади боковой поверхности. Можете ли вы узнать площадь его поверхности?

32.62.(5). В цилиндре проведены два взаимно перпендикулярных сечения, параллельные оси. Известны их площади. Можно ли найти: а) площадь боковой поверхности цилиндра; б) площадь поверхности цилиндра; в) объем цилиндра?

32.63.(5). Равны ли два цилиндра, у которых равны: а) площади боковых поверхностей и площади поверхностей; б) объемы и площади боковых поверхностей; в) объемы и площади поверхностей?

32.64.(5). Могут ли цилиндр и шар иметь одинаковые объемы и площади поверхностей?

32.65.(5). а) Плоскость делит пополам объем конуса. Следует ли из этого, что она делит пополам площадь его поверхности? б) Плоскость делит пополам площадь боковой поверхности конуса. Следует ли из этого, что она делит пополам его объем?

32.66.(5). Решите для конуса задачу, аналогичную задаче 32.63.

32.67.(5). Рассмотрим три величины: объем цилиндра, площадь его боковой поверхности и площадь поверхности. Можете ли вы, зная две из них, найти третью? Решите такую же задачу для конуса.

32.68.(5). Имеются два конуса. Может ли один из них иметь большую площадь боковой поверхности, а другой — большую площадь поверхности?

32.69.(5). Внутри конуса находится сфера. Может ли площадь ее поверхности быть равна: а) площади основания конуса; б) площади боковой поверхности конуса?

32.70.(5). Можно ли получить площадь боковой поверхности усеченного конуса, конуса, цилиндра, следуя схеме, указанной в задаче 32.54?

Переключаемся

32.71.(1). Три ученика вычисляли площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда и получили разные результаты. Почему это произошло? Можно ли по этим результатам узнать площадь поверхности параллелепипеда? Можно ли решить такую же задачу для произвольного параллелепипеда?

Прикладная геометрия

32.72.(3). Из шара с площадью поверхности 1 м^2 сделали какое-то количество одинаковых шариков. Может ли их суммарная площадь поверхности быть больше, чем 1 м^2?

32.73.(3). Краски хватает, чтобы покрасить один шар радиусом R. а) На сколько шаров ее хватит, если они будут иметь радиус $\frac{R}{10}$, а толщина слоя краски та же самая? б) Предположим, что вы решили красить шары слоем краски в два раза более толстым. На сколько шаров радиусом $\frac{R}{10}$ хватит краски теперь? в) Предположим, что вы решили красить шары радиусом R слоем краски в два раза более тонким. На сколько шаров хватит краски?

32.74.(4). Два мыльных пузыря площадью S слиплись. Будет ли площадь поверхности полученного пузыря равна $2S$?

32.75.(4). На высоте H над Землей висит спутник. Какая часть поверхности Земли с него видна?

32.76.(4). На какой высоте над Землей и сколько спутников достаточно иметь, чтобы с них можно было видеть всю Землю?

32.77.(4). Известно, что если растают все льды Гренландии, то уровень воды в Мировом океане поднимется примерно на 10 м. Как могло получиться такое число? Проведите свои расчеты.

32.78.(5). Поверхность бидона состоит из круга, боковых поверхностей двух цилиндров и боковой поверхности усеченного конуса. Как вы узнаете, сколько металла пошло на его изготовление? Не экономнее ли было бы сделать его боковую поверхность только цилиндрической?

Участвуем в олимпиаде

32.79.(3). Дан выпуклый многогранник объемом V и площадью поверхности S. Докажите, что радиус R наибольшего шара, умещающегося внутри его, удовлетворяет неравенствам $\frac{V}{S} < R \leqslant 3\frac{V}{S}$.

Рассуждаем

32.80.(1). Запишите формулу площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды. Можно ли из этой формулы получить формулу площади боковой поверхности правильной призмы? Можно ли из этой формулы получить формулу площади боковой поверхности правильной пирамиды?

§ 33*. Сферическая геометрия

33.1. Внутренняя геометрия сферы

Самый простой и самый важный пример геометрии на поверхности, не считая плоскости, представляет геометрия на сфере. Поверхность Земли является, в довольно хорошем приближении, сферой, поэтому тут речь идет практически о геометрии на Земле, рассматриваемой в больших масштабах. Над Землей простирается небесная сфера, та воображаемая сфера, на которой нам представляются движения небесных светил. Их видимое взаимное расположение подчиняется, стало быть, геометрии на сфере. Поэтому эта геометрия, как ее еще называют сферическая геометрия, составляет геометрическую основу наблюдательной астрономии. Именно в этой связи начала сферической геометрии были разработаны еще греческими геометрами, о чем уже было упомянуто.

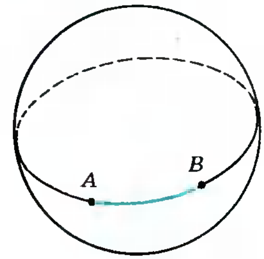


Рис. 154

На сфере кратчайшими линиями, соединяющими две точки, являются дуги больших окружностей, причем кратчайшая — это меньшая из двух дуг большой окружности (рис. 154). В частности, дуга большой окружности короче дуги параллели, отличной от экватора между теми же точками на земной поверхности (рис. 155). Поэтому при дальних полетах и дальних плаваниях, если возможно, летят или плывут не по постоянной широте, а в северном полушарии забирают на север — по дуге большой окружности. Например, кратчайший полет из Москвы до Хабаровска проходит над далеким севером Сибири.

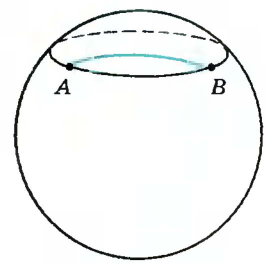


Рис. 155

Геометрия на сфере существенно отлична от геометрии на плоскости прежде всего тем, что плоскость не ограничена, а сфера ограничена: расстояния на ней не превосходят длины большой полуокружности. Роль прямых на сфере играют большие окружности, но каждые две из них пересекаются в двух диаметрально противоположных точках. На плоскости же две прямые пересекаются в одной точке либо вовсе не пересекаются.

Окружность на сфере в смысле ее внутренней геометрии является также обычной окружностью (рис. 156), но ее центр лежит на самой сфере, радиус — это дуга большой окружности, а вовсе не прямолинейный отрезок.

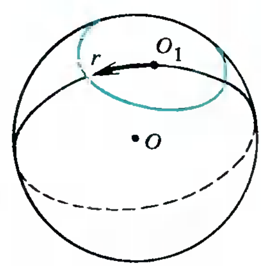


Рис. 156

Длина окружности при возрастании радиуса растет, но не пропорционально радиусу; она достигает максимума, дойдя до большой окружности, а потом убывает до нуля, когда окружность сжимается в точку, диаметрально противоположную центру (рис. 157). Можно сказать, у окружности на сфере два противоположных центра.

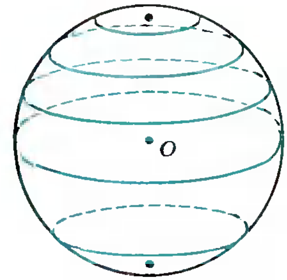


Рис. 157

* Заметим, что между геометрией на сфере и геометрией на плоскости есть много общего. На сфере так же выполняются теоремы о равнобедренном треугольнике, о равенстве треугольников, о точках пересечения биссектрис и медиан, о перпендикулярности радиуса и касательной к окружности и др. Главное здесь то, что на сфере возможно свободное движение фигур в такой же степени, как на плоскости.

Все движения сферы, очевидно, порождаются движениями пространства, имеющими центр сферы своей неподвижной точкой, и обратно: каждое такое движение пространства дает движение сферы. Поэтому основные теоремы о движениях сферы могут быть получены из теорем § 41. Согласно этим теоремам любое движение сферы есть либо ее поворот вокруг двух диаметрально противоположных точек, либо композиция такого поворота с отражением относительно большой окружности, имеющей эти точки своим центром на сфере.

Пользуясь этой подвижностью сферы, можно было бы площади фигур на сфере определить буквально так же, как на плоскости (а не таким способом, который был дан в § 32).

Словом, все сказанное о геометрии на сфере можно строго выразить в понятиях именно ее внутренней геометрии.

33.2. Сферические многоугольники и их площадь

В этом пункте речь пойдет о различиях между геометриями сферы и плоскости.

Поскольку роль отрезка в сферической геометрии играет дуга большой окружности (не бóльшая полуокружности), то **ломаной на сфере** естественно называется фигура, составленная из таких дуг, подобно тому, как составлена ломаная на плоскости из отрезков (рис. 158). Как и в планиметрии, замкнутая ломаная на сфере называется простой, если она не имеет самопересечений.

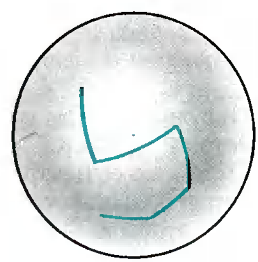


Рис. 158

Каждая простая замкнутая ломаная на сфере разбивает ее на две области, которые называются **сферическими многоугольниками** (рис. 159). Сама ломаная при этом называется границей этих многоугольников, а ее звенья и вершины соответственно сторонами и вершинами ограниченных ею многоугольников.

Измеряется угол сферического многоугольника в его вершине углом между лучами, идущими из этой вершины и касательными к его сторонам, если соответствующий угол многоугольника выпуклый, или его дополнением до 2π, если угол многоугольника невыпуклый (рис. 160).

На плоскости многоугольник с наименьшим возможным числом вершин — это треугольник. На сфере имеются **двуугольники** (рис. 161), две вершины которых диаметрально противоположны, а сторонами которых являются две полуокружности больших окружностей.

Пусть Q — двуугольник с вершинами A и A' на сфере S радиусом R и α — угол двуугольника Q, причем $\alpha<\pi$ (рис. 162). Тогда α равен величине двугранного угла, ребром которого является прямая AA' и в гранях лежат стороны двуугольника Q.

Ясно, что площадь $s(Q)$ двуугольника Q составляет ту часть от площади всей сферы S, которую составляет его угол от 2π, т. е.

$$\frac{s\,(Q)}{4\pi R^2}=\frac{\alpha}{2\pi}. \qquad (33.1)$$

Поэтому

$$s\,(Q)=2\alpha R^2$$

(угол α измеряется в радианах).

Сферическим треугольником называется тот многоугольник на сфере, ограниченный замкнутой трехзвенной ломаной, углы которого меньше π (рис. 163).

Оказывается, что

площадь $s\,(T)$ сферического треугольника T, лежащего на сфере S радиусом R, выражается через углы α, β, γ этого треугольника по формуле

$$s\,(T)=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)\,R^2. \qquad (33.2)$$

Действительно, проведем большие окружности, на которых лежат стороны треугольника T. Эти большие окружности образуют на сфере три пары двуугольников с углами α, β, γ. Эти шесть двуугольников покрывают всю сферу. При этом треугольник T и диаметрально противоположный ему треугольник T' покрываются трехкратно (двуугольником из каждой пары), а остальную часть сферы двуугольники покрывают без пере-

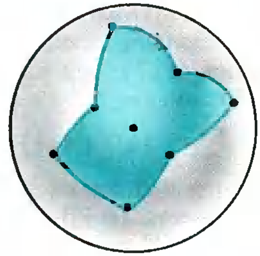


Рис. 159

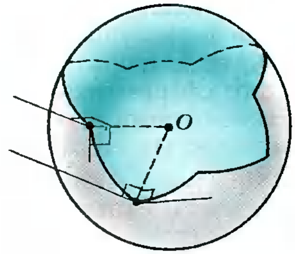


Рис. 160

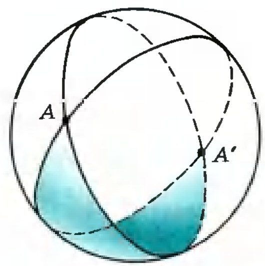


Рис. 161

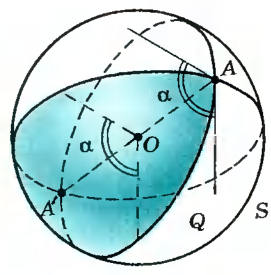


Рис. 162

крытий. Поэтому сумма площадей всех шести двуугольников больше площади сферы S на $2s(T)$ и $2s(T')$, т. е. на $4s(T)$, так как $s(T)=s(T')$. Тогда, используя (33.1), имеем:

$$4\pi R^2+4s(T)=4\alpha R^2+4\beta R^2+4\gamma R^2, \qquad (33.3)$$

откуда и вытекает (33.2).

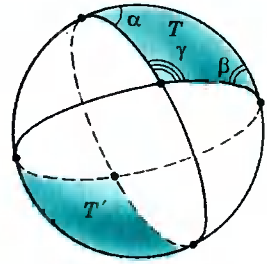


Рис. 163

Разность $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ называется **избытком треугольника** T и обозначается через $\delta(T)$.

Доказанная формула (33.2) теперь может быть выражена так: ***площадь сферического треугольника пропорциональна его избытку.***

Зная формулу площади сферического треугольника, теперь легко найти выражение для площади любого простого сферического многоугольника P.

Назовем поворотом многоугольника P в его вершине A, имеющей угол $\alpha(A)$, разность $\tau_p(A)=\pi-\alpha(A)$. Границу многоугольника P обозначим символом ∂P и ее поворотом $\tau(\partial P)$ назовем сумму поворотов $\tau_p(A)$ во всех вершинах $A\in P$.

Если число вершин P равно n, то

$$\tau(\partial P)=\pi n-\sum_{A\in P}\alpha(A), \qquad (33.4)$$

т. е. поворот границы n-угольника показывает, насколько величина πn отличается от суммы его углов. Для простых многоугольников на евклидовой плоскости их поворот всегда равен 2π, так как сумма углов любого плоского n-угольника равна $(n-2)\pi$. Для сферических же простых многоугольников имеет место следующая теорема:

Теорема 33.1

Площадь простого многоугольника P на сфере радиусом R и поворот его границы связаны равенством

$$\mathbf{s(P)=(2\pi-\tau(\partial P))R^2}. \qquad (33.5)$$

Доказательство. Докажем равенство (33.5) индукцией по числу вершин n-угольника P. Для $n=2$ и $n=3$ оно имеет своими частными случаями уже доказанные равенства (33.1) и (33.2).

Предположим, что (33.5) верно для всех многоугольников, число вершин которых меньше n.

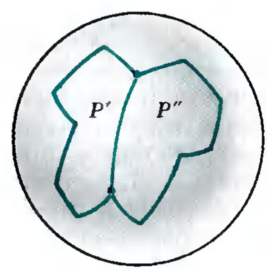


Рис. 164

Возьмем произвольный n-угольник P (рис. 164) и разобьем его какой-нибудь диагональю на многоугольники P' и P'' с меньшим числом вершин (например, отрежем от P какой-нибудь треугольник). Наглядно ясно, что так сделать можно, но доказать это не просто. Тогда легко подсчитать

$$\tau(\partial P')+\tau(\partial P'')=2\pi+\tau(\partial P). \qquad (33.6)$$

Так как

$$s(P')=(2\pi-\tau(\partial P'))R^2 \text{ и } s(P'')=(2\pi-\tau(\partial P''))R^2,$$

то

$$s(P)=s(P')+s(P'')=(4\pi-\tau(\partial P')-\tau(\partial P''))R^2=$$
$$=(2\pi-\tau(\partial P))R^2. \blacksquare$$

33.3. Сферические многоугольники и многогранные углы

Фиксируем некоторую сферу S единичного радиуса с центром в точке O. Каждому сферическому многоугольнику $P\subset S$ можно поставить в соответствие многогранный угол $V(P)$, вершина которого лежит в точке O, ребра которого проходят через вершины многоугольника P, а грани которого пересекают сферу S по сторонам многоугольника P (рис. 165). Ясно, что верно и обратное: каждый многогранный угол с вершиной в точке O пересекает сферу по простой замкнутой ломаной (если допустить, что при этом многогранный угол имеет невыпуклые грани, то среди звеньев ломаной будут дуги, бо́льшие полуокружности).

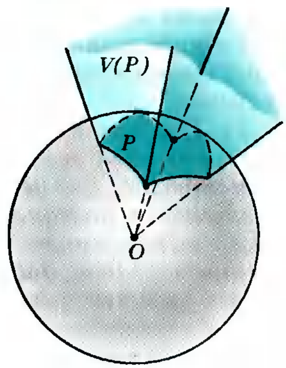


Рис. 165

Сферическим треугольникам соответствуют трехгранные углы, а двуугольникам — двугранные.

Ясно, что длины сторон многоугольника P равны величинам плоских углов соответствующих граней угла $V(P)$, а углы в вершинах многоугольника P измеряются так же, как двугранные углы при соответствующих ребрах угла $V(P)$ (рис. 166).

Поэтому каждой теореме о сферических многоугольниках соответствует теорема о многогранных углах. Например, теорема о том, что сумма длин двух сторон сферического треугольника больше длины его третьей стороны,— это теорема о том, что в трехгранном угле сумма двух его плоских углов больше третьего, и т. п. Приведите другие примеры.

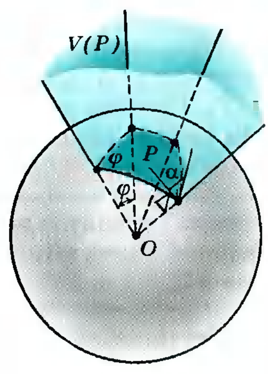


Рис. 166

Выпуклым многогранным углам, т. е. углам, лежащим по одну сторону от плоскости каждой своей грани, соответствуют выпуклые сферические многоугольники.

Для любого выпуклого многогранного угла V с вершиной в точке O можно построить двойственный ему угол V' с вершиной в той же точке. Ребрами его будут лучи, перпендикулярные граням угла V и расположенные с V по разные стороны от плоскости соответствующей грани (рис. 167). Нетрудно доказать следующие свойства угла V', двойственного V (сделайте это самостоятельно).

1) Если грань Q_i' угла V' имеет сторонами лучи l_i и l_{i+1}, перпендикулярные соседним граням Q_i и Q_{i+1} угла V, то угол φ_i' между l_i и l_{i+1} (т. е. величина плоского угла Q_i') ***равен $\pi-\alpha_i$, где α_i — величина двугранного угла между Q_i и Q_{i+1}. Поэтому поворот границы многоугольника P, вырезаемого углом V на сфере S, равен сумме плоских углов многогранного угла V', двойственного V.***

2) Многогранный угол V' — выпуклый и двойственный ему многогранный угол — это исходный многогранный угол V. Поэтому отношение двойственности выпуклых многогранных углов взаимно.

3) Так как при изгибании выпуклого многогранного угла сумма углов вокруг его вершины не меняется, то не меняется поворот границы (а значит, и площадь) сферического многоугольника, вырезаемого на единичной сфере многогранным углом, двойственным исходному.

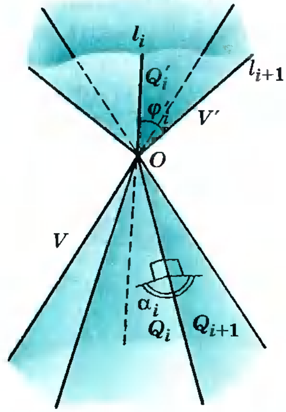


Рис. 167

Эти свойства позволяют доказать, что

сумма плоских углов любого выпуклого многогранного угла меньше 2π.

Действительно, рассмотрим выпу́клый многогранный угол V и обозначим через $\alpha(V)$ сумму его плоских углов. Пусть P' — тот сферический многоугольник, который вырезает на единичной сфере S многогранный угол V', двойственный V. По формуле (33.5) $s(P')=$ $=2\pi-\tau(\partial P')$. А согласно свойствам 1 и 2 $\tau(\partial P')=$ $=\alpha(V)$. Поэтому $\alpha(V)=2\pi-s(P')<2\pi$. ■

Величину $2\pi-\alpha(V)$ **называют кривизной многогранного угла** V. Оказывается,

---

сумма кривизн всех многогранных углов при вершинах замкнутого выпуклого многогранника равна 4π.

Действительно, для каждого такого многогранного угла V_i построим двойственный ему многогранный угол V_i' с вершиной в центре единичной сферы S. Тогда сферические многоугольники P'_i, вырезаемые на сфере S углами V'_i, покрывают всю сферу и не перекрываются друг с другом. Поэтому сумма их площадей, которые и являются кривизнами углов V_i, равна 4π. ■

Замечание. Этот же результат можно получить, подсчитывая сумму плоских углов вокруг вершин и по граням и пользуясь теоремой Эйлера. Попробуйте провести такой вывод.

33.4. Задачи картографии

Картография — это наука об отображении поверхности Земли или ее части на плоскость, т. е. наука об изготовлении географических карт. Картография является частью географии, использующей геометрические методы.

Идеальной, конечно, была бы такая карта, на которой отношения расстояний между точками Земли были бы равны отношениям расстояний между их изображениями на карте, т. е. карта, подобная оригиналу. Но поскольку поверхность Земли близка к сферической (мы будем полагать ее сферой, хотя в картографии рассматриваются и более точные приближения), а сфера и плоскость даже в малом не изометричны (например, на сфере и плоскости совершенно разные закономерности в измерении углов и площадей треугольников через длины их сторон), то такое отображение поверхности Земли (или достаточно больших ее частей) на плоскость невозможно. Так, эту задачу можно решить, лишь изготовляя глобус, а не карту, или приближенно, если изображать на карте достаточно малые части поверхности Земли, которые можно считать плоскими. Из таких карт затем можно составить атлас, охватывающий всю Землю или любую ее часть.

Если же говорить об отображении всей поверхности Земли или ее половины на плоскость, то имеются различные способы, сохраняющие некоторые свойства оригинала, например углы между любыми направлениями (так называемые конформные отображения) или отношения площадей (так называемые эквиареальные отображения) и некоторые другие. Все эти отображения обычно называются проекциями, так как при их построении применяется проектирование модели земной сферы — глобуса — на плоскость. В зависимости от назначения карты используются проекции, наиболее удобные для соответствующих целей. Применяются проекции, не сохраняющие углов, отношения площадей и т. п., но простые в построении и дающие хорошее представление о взаимном расположении географических объектов и их очертаниях.

Задачами картографии занимались многие выдающиеся математики: Гиппарх (II в. до н. э.), Птолемей (II в.), Л. Эйлер (1707—1783), Ж. Лагранж (1736—1813), К. Гаусс (1777—1855). Укажем некоторые картографические проекции.

Ясно, что каждая проекция фактически определяется изображением сети меридианов и параллелей. По виду этих сетей и определяется тип проекции.

1. Цилиндрические проекции. Это такие проекции, в которых сеть параллелей и меридианов изображается ортогональной сетью прямых линий. Название этого типа проекций определяется тем, что глобус проектируется на боковую поверхность цилиндра, касающегося глобуса по экватору. Меридианы при этом перейдут в образующие цилиндра, а параллели — в сечения боковой поверхности цилиндра плоскостями, перпендикулярными его оси. После развертки боковой поверхности цилиндра на плоскость меридианы и параллели образуют ортогональную сеть прямых.

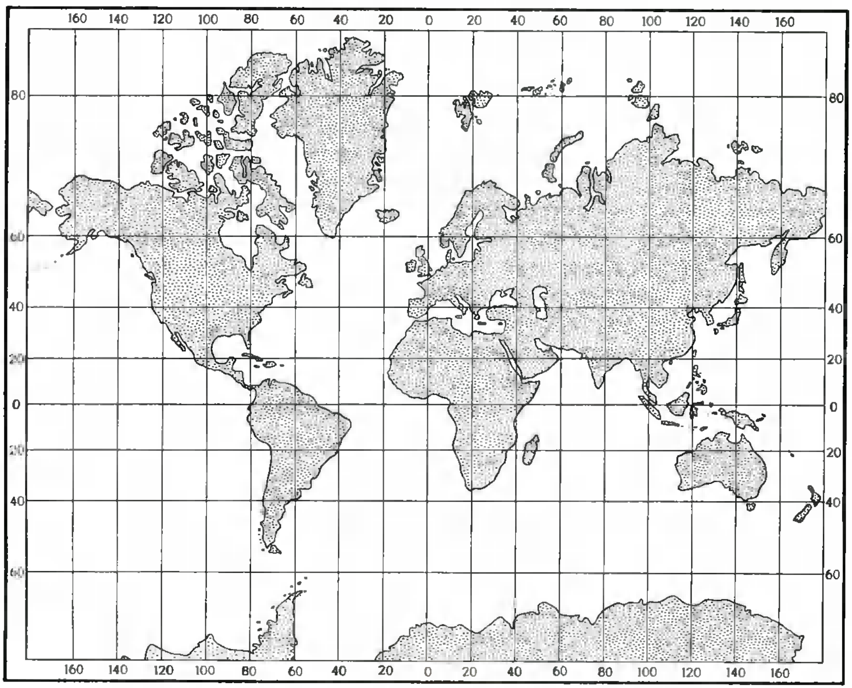
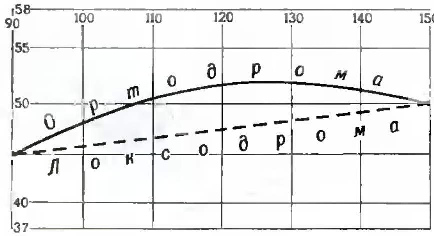


Рис. 168

В зависимости от различных законов растяжений по меридиану и экватору получаются различные цилиндрические проекции. Среди них укажем проекцию, предложенную еще в 1569 г. голландским математиком Г. Меркатором (1512—1594), считающимся основателем научной картографии. Меркаторова проекция (рис. 168, *а*) характеризуется тем, что на ней кривые, пересекающие меридианы под постоянным углом (румбовые линии), изображаются прямыми линиями. Они удобны в мореплавании, так как курс судна, идущего под постоянным румбом, изображается на меркаторской карте отрезком прямой. (Напомним, что этот курс не кратчайший, так как кратчайший курс идет по дугам больших окружностей, на карте изображения этих дуг называются ортодромами (рис. 168, *б*). Поэтому, стремясь сократить курс и одновременно упростить управление кораблем, обычно в ортодрому вписывают ломаную из румбовых линий — локсодром (рис. 169).)

Из цилиндрических проекций укажем еще эквиареальную проекцию, предложенную в 1772 г. немецким математиком И. Г. Ламбертом (1728—1777). При построении этой проекции параллели изображаются на цилиндре окружностями, по которым их плоскости пересекают поверхность цилиндра (рис. 170).

2. Конические проекции. Это такие проекции, в которых меридианы изображаются прямыми, проходящими через одну точку, а параллели — концентрическими окружностями с центром в этой точке (рис. 171). К ним, в частности, относится и стереографическая проекция. Она получается с помощью центрального проектирования сферы из полюса на плоскость,



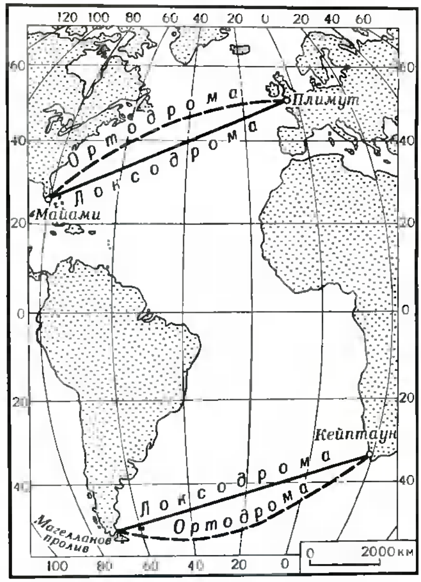


Рис. 169

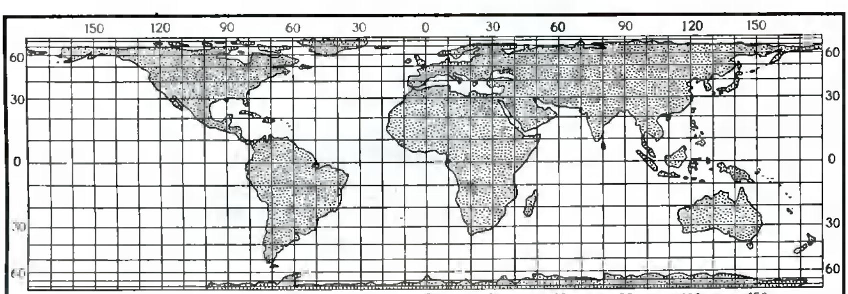


Рис. 170

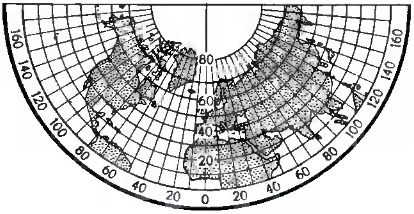


Рис. 171

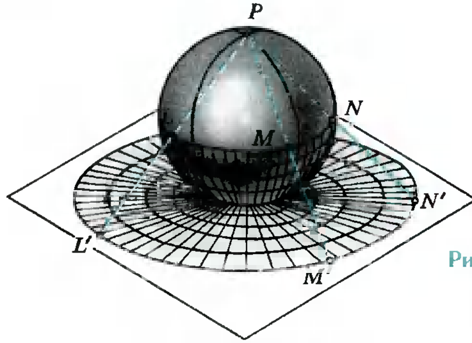


Рис. 172

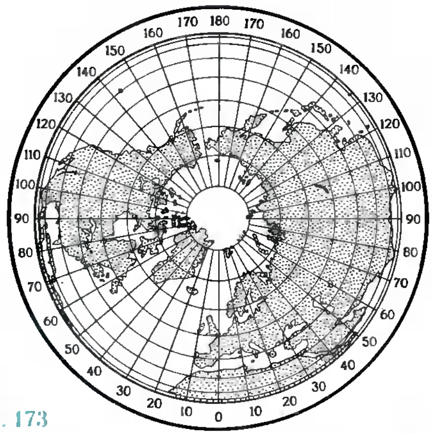


Рис. 173

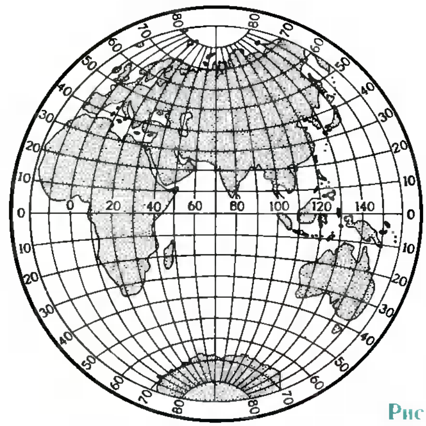


Рис. 174

касающуюся сферы в противоположном полюсе, или параллельную ей плоскость (рис. 172). В этой проекции все круги на сфере изображаются кругами на плоскости и сохраняются углы между кривыми, т. е. она конформная. Стереографическую проекцию использовал еще Птолемей для изображения небесной сферы.

3. Ортографическая проекция. Она получается просто с помощью ортогонального проектирования полусферы на плоскость ее границы (обычно на плоскость меридиана или экватора, рис. 173).

4. Глобулярная проекция. В этой проекции на карте в круге изображается одно полушарие, а меридианы и параллели изображаются дугами окружностей, кроме экватора и среднего меридиана, которые изображаются перпендикулярными диаметрами круга (рис. 174). Эти диаметры и граничная окружность круга разбиваются равномерно градусными значениями широты и долготы. Через полученные три точки с одинаковыми значениями и проводятся дуги окружностей. Эта проекция используется лишь для обзорных карт.

Дополнение к параграфу 33

I. «Неравенство треугольника» на сфере и его следствия

Теоремы о длинах сторон сферических многоугольников равносильны теоремам о плоских углах многогранных углов. Так «неравенство треугольника» на сфере равносильно классической теореме о том, что сумма любых двух плоских углов трехгранного угла больше его третьего плоского угла. Эту теорему доказывал еще Евклид в 11-й книге своих «Начал». Вот как он это делал (цитируем Евклида):

«**Предложение 20.** *Если телесный угол заключается между тремя плоскими углами, то два каких угодно угла во всех сочетаниях будут больше оставшегося.*

Пусть телесный угол, что при A, заключается между тремя плоскими углами BAC, CAD, DAB; я утверждаю, что из углов BAC, CAD, DAB два каких угодно во всех сочетаниях будут больше оставшегося (рис. 175).

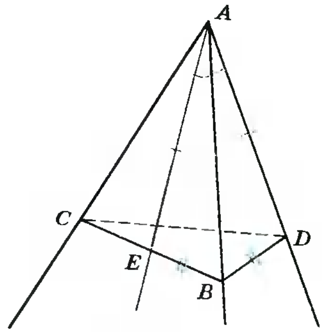


Рис. 175

Если теперь углы BAC, CAD, DAB равны друг другу, то ясно, что два каких угодно больше третьего. Если же нет, то пусть большим будет угол BAC и построим в плоскости, проходящей через BAC, на прямой AB при точке ее A угол BAE, равный углу DAB, отложим AE равной AD, и пусть проведенная через точку E прямая BEC пересекает прямые AB, AC в точках B, C, и соединим DB, DC. И поскольку DA равна AE, AB же общая, то две равны двум, и угол DAB равен углу BAE; значит, основание DB будет равно основанию BE (предложение 4 книги I). И поскольку две BD, DC более BC, из которых DB, как доказано, равна BE, то, значит, и остающаяся DC будет больше остатка EC. И поскольку DA равна AE, AC же общая, и основание DC больше основания EC, то, значит, угол DAC будет больше угла EAC (предложение 25 книги I). Доказано же, что и угол DAB равен углу BAE, значит, углы DAB, DAC вместе будут больше угла BAC. Подобно же вот докажем, что и другие взятые попарно будут больше оставшегося.

Итак, если телесный угол заключается между тремя плоскими углами, то два каких угодно угла во всех сочетаниях будут больше оставшегося, что и требовалось доказать».

Поищите другие доказательства предложения 20. Оно следует, например, из «теоремы Пифагора» для прямоугольного сферического треугольника на единичной сфере S: $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ (рис. 176).

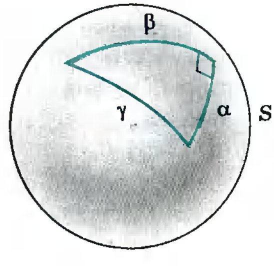


Рис. 176

Вслед за предложением 20 как его следствие доказано предложение 21:

«Всякий телесный угол заключается между плоскими углами, меньшими чем четыре прямых угла».

Евклид рассматривает лишь трехгранные углы, которые всегда выпуклы. Точнее же предложение 21 надо сформулировать так: *сумма плоских углов любого выпуклого многогранного угла меньше четырех прямых углов, т. е. меньше 360°.*

Об этой теореме мы говорили уже не раз и вывели ее в п. 33.3 как следствие нескольких утверждений о многогранных углах.

Для сферических многоугольников эта же теорема звучит так: *на сфере радиуса R периметр выпуклого сферического многоугольника меньше $2\pi R$ (кроме двуугольника, у которого он равен $2\pi R$).*

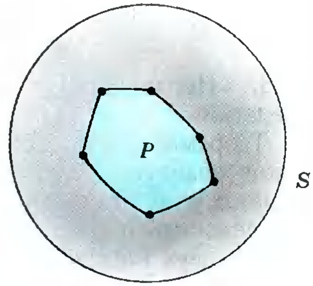


Рис. 177

Доказать это утверждение, используя «неравенство треугольника», совсем просто. Рассмотрим выпуклый сферический многоугольник P (рис. 177). Продолжая его стороны, преобразуем его в двуугольник (рис. 178). При таких преобразованиях, согласно «неравенству треугольника», периметры многоугольников лишь возрастают и достигают $2\pi R$, когда он перейдет в двуугольник. Поэтому в начальный момент периметр многоугольника был меньше $2\pi R$. Доведите этот план до детального доказательства.

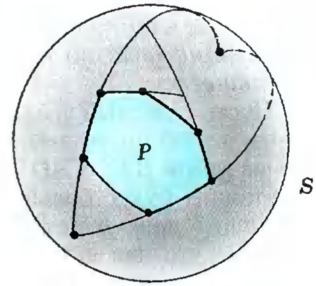


Рис. 178

11. Минимальность длин дуг больших окружностей

Используя подвижность сферы, докажем, что дуга L, меньшая из двух дуг большой окружности, соединяющая две не диаметрально противоположные точки A и B на сфере S, является кратчайшей.

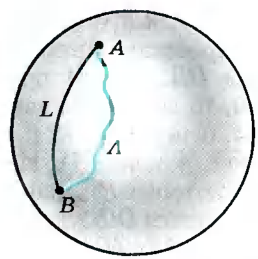


Рис. 179

Допустим, что кратчайшей, соединяющей точки A и B является не дуга L, а некоторая кривая Λ, отличная от L (рис. 179). Так как Λ отлична от L, то Λ не проходит через некоторую точку C кривой L. Проведем на сфере S две окружности: Γ_1 с центром в точке A и радиусом AC и Γ_2 с центром в точке B и радиусом BC (рис. 180). Окружности Γ_1 и Γ_2 не имеют других общих точек, кроме точки C. Кривая Λ пересекает окружность Γ_1 в некоторой точке C_1, а окружность Γ_2 — в некоторой другой точке C_2. Точки C_1 и C_2 разобьют кривую Λ на три дуги: Λ_1 от A до C_1, Λ^* от C_1 до C_2 и Λ_2 от C_2 до B.

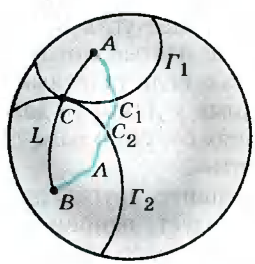


Рис. 180

Повернем теперь вокруг точки A круг D_1 на сфере S с центром A и окружностью Γ_1 так, чтобы точка C_1 совпала с точкой C (рис. 181). Аналогичный поворот вокруг точки B сделаем и для круга D_2 с центром B

и окружностью Γ_2. В результате этих поворотов из дуг Λ_1 и Λ_2 получим кривую Λ', соединяющую точки A и B на сфере S. Ее длина на длину дуги Λ^* меньше длины кривой Λ, что невозможно, так как кривая Λ кратчайшая, соединяющая точки A и B. Получили противоречие. Следовательно, кратчайшая кривая Λ совпадает с дугой L.

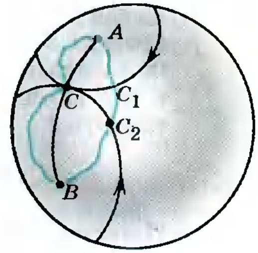


Рис. 181

Задачи

Планируем

33.1. Как найти угол между двумя большими окружностями на сфере?

33.2. Как на данном шаре построить: а) точку, диаметрально противоположную данной; б) большую окружность через две данные точки; в) окружность через три данные точки; г) окружность, касающуюся данной?

33.3. На данном шаре отмечены полюсы и нулевой меридиан. Как вы найдете координаты некоторой отмеченной точки?

33.4. Как вы найдете площадь части сферы известного радиуса, находящейся между двумя окружностями, проведенными на ней?

Доказываем

33.5. На сфере проведены три окружности. Докажите, что найдется такая окружность, которая каждую из них делит пополам.

33.6. Докажите, что два сферических треугольника равны по трем углам.

Исследуем

33.7. Найдите утверждения, связанные с перпендикулярностью, в сферической геометрии, аналогичные утверждениям планиметрии. Найдите утверждения, не имеющие аналогий.

33.8. Для сферического треугольника найдите теоремы, аналогичные теоремам планиметрии. Найдите утверждения, не имеющие аналогий. Проведите такую же работу для сферических многоугольников.

33.9. Запишите теоремы для сферических треугольников, аналогичные теоремам косинусов и синусов для трехгранного угла. Что будет с соотношениями в этих теоремах, если радиус сферы стремится к бесконечности?

33.10. Какого вида треугольники могут быть на сфере (провести классификацию по сторонам и углам)?

Переключаемся

33.11. Муравей пополз по шару вниз по меридиану и прополз 1 м, потом пополз по параллели и прополз 1 м, потом пополз вверх по меридиану и прополз 1 м. После всего этого он оказался там, где был. Так где же он был?

33.12. Некий путешественник задумал двигаться по Земле всегда в направлении на северо-восток. Куда бы он попал в результате?

33.13. Некие существа, знающие геометрию, живут на сфере. Могут ли они, проводя измерения только на поверхности, установить: а) что они живут не на плоскости; б) что они живут именно на сфере? Однажды эта сфера и все на ней начало увеличиваться в размерах. Смогли бы они это установить?

Прикладная геометрия

33.14. Известны координаты двух точек на Земле. Как вы найдете расстояние между ними?

Участвуем в олимпиаде

33.15. Докажите, что: а) в сферическом треугольнике ABC $\angle A+\angle B-\angle C<180°$ (стороны и углы $\triangle ABC$ меньше 180°); б) если $\angle A+\angle B>180°$, то $a+b>180°$ (a и b — стороны сферического треугольника, лежащие против его углов A и B).

Задачи к главе VII

Находим величину

VII.1. В треугольной пирамиде два противоположных ребра равны 2, а остальные равны 4. Вычислите расстояние между центрами вписанного и описанного шаров этой пирамиды.

VII.2. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной 3. Ее боковые грани — прямоугольные треугольники. Длина наименьшего бокового ребра равна 4. Вычислите расстояние между центрами вписанного и описанного шаров этой пирамиды.

VII.3. В основании четырехугольной пирамиды квадрат со стороной 2. Вычислите радиусы вписанного и описанного шаров, если: а) ровно одна ее грань — равносторонний треугольник и ровно одна — прямоугольный треугольник; б) ровно одна ее грань — равносторонний треугольник и ровно две — прямоугольные треугольники; в) ровно две ее грани — равносторонние треугольники.

VII.4. Вам нужно сделать цилиндр заданного объема и площади поверхности. Каковы размеры развертки боковой поверхности этого цилиндра? Решите такую же задачу про конус.

VII.5. Проверьте, что для шара объемом V и площадью поверхности S выполняется соотношение $S^3 : V^3 = 36\pi$, а для остальных известных вам тел — $S^3 : V^3 > 36\pi$.

VII.6. В шаре радиусом R сделали сквозное цилиндрическое отверстие, ось которого совпадает с диаметром шара. Радиус отверстия $\frac{1}{2}R$. Чему равна площадь поверхности полученного тела?

VII.7. Шар касается всех ребер правильного многогранника. В каком отношении делится объем и площадь поверхности шара поверхностью этого многогранника?

Ищем границы

VII.8. В основании пирамиды $PABC$ находится равносторонний треугольник со стороной 1. $(PB)\perp(ABC)$, $PB=1$. Две вершины правильной треугольной призмы находятся на ребре PB, еще две — на ребрах AB и BC, две — на ребрах PA и PC. В каких границах лежат значения объема и площади поверхности такой призмы?

VII.9. В данной правильной четырехугольной пирамиде находятся два прямоугольных параллелепипеда: один имеет наибольший объем, а другой — наибольшую площадь поверхности. Совпадают ли они? (Их основания лежат на основании пирамиды.)

VII.10. Дан правильный тетраэдр с ребром 1. В нем находится правильная треугольная пирамида. Три ее вершины лежат на боковых ребрах, а одна — в центре основания. В каких границах лежат значения ее объема и площади поверхности?

VII.11. Из прямоугольного листа жести с диагональю d делается боковая поверхность цилиндра, после чего с одного конца к ней припаивается крышка. В каких границах лежат значения объема получившейся емкости?

VII.12. Около шара известного радиуса описана правильная n-угольная пирамида. В каких границах лежат значения ее объема и площади поверхности? Решите такую же задачу про конус, усеченный конус.

VII.13. Из всех параллелепипедов, вписанных в данный шар, найдите тот, у которого достигает наибольшего значения объем; площадь поверхности. Будет ли это один и тот же параллелепипед? А есть ли такое известное вам тело, для которого эти две величины достигают наибольшего значения одновременно?

VII.14. В данный шаровой сегмент вписан цилиндр. В каких границах лежат значения его объема и площади поверхности? Решите такую же задачу для конуса, усеченного конуса. Решите аналогичные задачи про эти же фигуры, вписанные в данный шаровой сектор.

VII.15. Шаровой сектор является частью шара радиусом R. При каком угле в его осевом сечении: а) площадь боковой поверхности конуса, являющегося его частью, больше площади сферического сегмента; б) объем этого конуса меньше объема шарового сегмента; в) достигает наибольшего значения площадь поверхности сектора; объем сектора?

VII.16. На данной сфере расположены три сегмента так, что каждые два имеют ровно одну общую точку. Площадь каждого равна S. Какова площадь сегмента, имеющего ровно одну общую точку с данными? Какова наименьшая площадь сегмента, накрывающего все данные?

VII.17. На шар надевают проволочный каркас так, что каждое его звено касается сферы. Он имеет вид правильной треугольной пирамиды. Как это сделать так, чтобы: а) затраты проволоки были наименьшими; б) за пределами каркаса площадь всех частей сферы была наименьшей; в) за пределами каркаса объем всех частей шара был наименьшим?

Доказываем

VII.18. Докажите, что проекция Меркатора не искажает площади частей сферы.

Исследуем

VII.19. Цилиндр разделили на две части плоскостью, параллельной оси. После этого построили развертки боковых поверхностей каждой из полученных частей. Зная размеры этих разверток, сможете ли вы установить, каковы были объем и площадь поверхности исходного цилиндра?

VII.20. Верно ли, что любое выпуклое тело можно разделить одной плоскостью на две части так, что объемы и площади поверхностей этих частей будут равны?

VII.21. Для вычисления площади поверхности вращения есть такие формулы:

1) $S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, где $y=f(x)$ — уравнение вращающейся линии, $a\leqslant x\leqslant b$;

2) $S=\int_0^l C(x)\,dx$, где l — длина вращающейся линии AB, $C(x)$ — длина окружности, по которой вращается точка K линии AB, причем x — длина участка AK. Из каких соображений они могли бы быть получены?

VII.22. Для вычисления площади поверхности вращения есть теорема Паппа — Гюльдена. Она выглядит так: «Если поверхность образована вращением некоторой плоской линии около оси, лежащей с ней в одной плоскости, причем линия лежит по одну сторону от оси, то площадь поверхности равна произведению длины линии и длины окружности, описанной при этом вращении центром тяжести линии». Из каких соображений можно было бы получить этот результат?

Прикладная геометрия

VII.23. Вам нужно найти площадь реальной поверхности вращения. У вас есть кусок алюминиевой проволоки и прочие подручные средства. Как вы будете действовать?

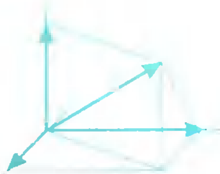
VII.24. Сравните площадь поверхности Гренландии и Африки на карте и по справочнику. Как вы объясните результаты сравнений?

VII.25. Требуется определить количество воды в Мировом океане. Какие данные вам для этого понадобятся?

VII.26. Фасовка продуктов идет в стандартную тару. Какая фасовка более выгодна: мелкая или крупная? Подтвердите свой ответ конкретным расчетом.

VII.27. Перед вами одинаковые кастрюли, наполненные доверху картофелем. Картофель надо почистить, причем побыстрее. В одной кастрюле вся картошка крупная, в другой — мелкая. За какую кастрюлю вы приметесь? Объясните свой выбор. При каких предположениях он сделан? Попробуйте дать численную оценку экономии времени.

Глава VIII



Векторы и координаты

§ 34. Векторы

В этом параграфе мы в основном напоминаем уже известные вам сведения о векторах.

34.1. Понятие вектора

Как вы знаете из физики и планиметрии, **векторными величинами** или, короче, **векторами** называются величины, которые характеризуются не только численным значением при выбранной единице измерения, но и направлением.

Численное значение вектора называется его **модулем** или **абсолютной величиной.** Особый случай представляет **нулевой вектор** — его модуль равен нулю, а направления он не имеет.

Ненулевые векторы изображаются **направленными отрезками.** Напомним, что направленным отрезком называется отрезок, у которого указан порядок концов: первый называется началом, второй — концом. Направленные отрезки тоже называют векторами.

Вектор с началом A и концом B обозначается $\overrightarrow{AB}$. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ — это длина отрезка AB.

34.2. Сонаправленность и равенство векторов

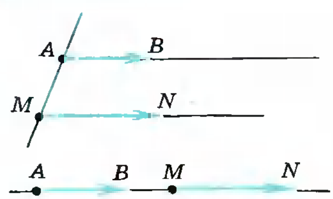


Рис. 182

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ называются **сонаправленными** или **одинаково направленными,** если лучи AB и MN сонаправлены (рис. 182).

Напомним, что понятие сонаправленности лучей было определено в п. 14.1. Для сонаправленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применяется обозначение: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

Из этого определения и сонаправленности двух лучей, сонаправленных с третьим (лемма 14.2), вытекает признак сонаправленности векторов: *два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены.*

Ненулевые векторы называются **равными**, если их длины равны и они сонаправлены. Равенство нулевых векторов определяется лишь первым из этих условий.

Итак, равенство $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ означает: 1) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{MN}|$ и 2) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{MN}$ (рис. 183). Второе условие проверяется лишь в случае, когда $|\overrightarrow{AB}|\neq 0$.

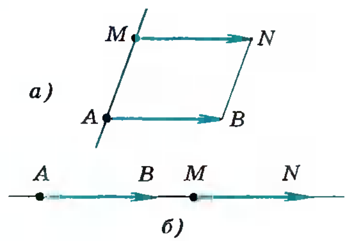


Рис. 183

Из данного определения и признака сонаправленности векторов следует **признак равенства векторов:**

два вектора, равные третьему вектору, равны.

Действительно, длины у них равны, а направление у них одно и то же.

Отложить от данной точки вектор, равный данному,— значит построить направленный отрезок с началом в этой точке, изображающий данный вектор. *От любой точки в пространстве можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.*

Действительно, пусть заданы вектор $\overrightarrow{AB}$ и некоторая точка M. Тогда найдется единственная точка N, такая, что $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$. Если точка M не лежит на прямой AB (рис. 183, *а*), то, построив параллелограмм $ABNM$, найдем искомую точку N. Если же точка M лежит на прямой AB (рис. 183, *б*), то на том луче прямой AB, который имеет начало в точке M и сонаправлен с лучом AB, откладываем отрезок MN, равный отрезку AB. В обоих случаях точка N единственная. ■

Напомним еще, что два вектора называются **коллинеарными** (или **параллельными**), если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой. Аналогично определяется параллельность и перпендикулярность векторов прямым и плоскостям. О двух параллельных, но несонаправленных ненулевых векторах говорят, что они **направлены про-**

тивоположно. Параллельность, перпендикулярность и противоположная направленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначаются соответственно так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$.

Векторы, параллельные некоторой плоскости, называются **компланарными**. Нуль-вектор считается параллельным (и перпендикулярным) любой прямой и любой плоскости.

Замечание (о направлении). В геометрии в связи с направленными отрезками, а затем с векторами используется термин «направление». Для верного понимания его вполне достаточно наглядного представления. При доказательстве теорем, решении задач, правда, потребуется совершенно четкое понимание, что такое «одинаковое направление» и «разные направления» у двух векторов. Но для этого у нас есть специальное определение и признак сонаправленности векторов. Основываясь на нем, легко разъяснить, в каком смысле в геометрии может использоваться термин «направление». Про любое число сонаправленных векторов можно говорить, что они имеют «одинаковое направление», т. е. иметь «одно направление» — значит иметь свойство, общее для любого числа сонаправленных векторов. А направление — это свойство, общее у сонаправленных векторов и разное у несонаправленных векторов. Естественно, что направление задают вектором.

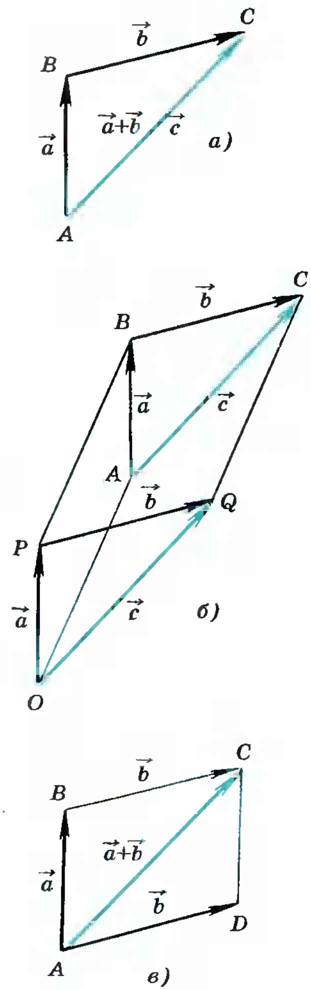


Рис. 184

34.3. Сложение векторов

Как и в планиметрии, **сумму двух векторов** можно найти по **правилу треугольника** (рис. 184, *а*). А именно если даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то вектор $\vec{a}$ откладываем от любой точки A ($\overrightarrow{AB} = \vec{a}$). Затем от его конца — точки B — откладываем вектор $\vec{b}$ ($\overrightarrow{BC} = \vec{b}$). Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Полученный результат не зависит от выбора точки A. А именно если взять другую точку O и отложить векторы $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{PQ} = \vec{b}$, то в результате получим вектор $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 184, *б*).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ непараллельны, то их сумму можно получить, пользуясь известным вам **правилом параллелограмма**. Согласно этому правилу надо отложить их от одной точки: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

(рис. 184, *в*). Затем построить на отрезках AB и AD параллелограмм $ABCD$. Вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Свойства операции сложения векторов в стереометрии те же самые, что и в планиметрии, и доказываются они точно так же, как в планиметрии. Перечислим эти свойства, сопровождая их рисунками, из которых ясно, как они доказываются.

1. Переместительное свойство *(коммутативность): $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$* (рис. 185, *а*).

2. Сочетательное свойство *(ассоциативность): $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$* (рис. 185, *б*).

3. Свойство нуль-вектора: *$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.*

4. Существование и единственность противоположного вектора: *для каждого вектора $\vec{a}$ существует, и притом единственный, вектор $-\vec{a}$, такой, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$* (рис. 185, *в*).

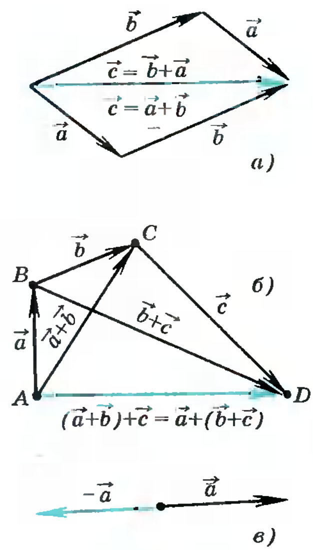


Рис. 185

Вычитание векторов — это операция, обратная сложению векторов. Вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ — значит найти такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даст вектор $\vec{a}$ (рис. 186, *а*). Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, можно прибавить к вектору $\vec{a}$ вектор $-\vec{b}$ (рис. 186, *б*).

По правилу параллелограмма сумма двух векторов, непараллельных одной прямой, представляется диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах, отложенных от одной точки.

Аналогично сумма трех векторов, непараллельных одной плоскости, представляется диагональю параллелепипеда, построенного на данных векторах, отложенных от одной точки, как на ребрах (рис. 187). Убедитесь в этом.

Рис. 186

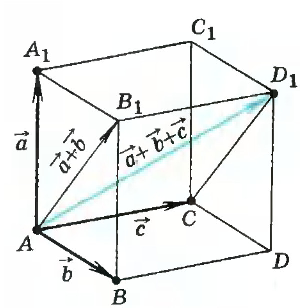


Рис. 187

34.4. Умножение вектора на число

Напомним определение этой операции, данное еще в планиметрии.

Пусть даны ненулевой вектор $\vec{a}$ и действительное число $x \neq 0$. Произведением вектора $\vec{a}$ и числа x называется такой вектор $x\vec{a}$, который, во-первых, имеет модуль $|x|\,|\vec{a}|$ и, во-вторых, сонаправлен с $\vec{a}$, если $x>0$, и направлен противоположно вектору $\vec{a}$, если $x<0$ (рис. 188). Если же $\vec{a}=\vec{0}$ или $x=0$, то полагают $x\vec{a}=\vec{0}$.

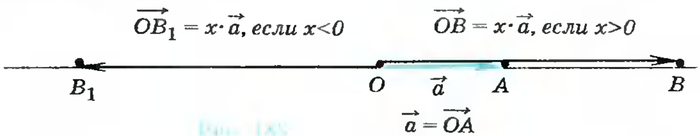


Рис. 188

Отметим четыре свойства умножения вектора на число. Они известны из планиметрии и относятся к планиметрии: выполняющиеся в них действия производятся с векторами, лежащими в одной плоскости или на одной прямой, если отложить их от одной точки. Эти свойства выполняются для любых векторов и чисел.

Свойство 1. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Свойство 2. $x(y\vec{a})=(xy)\vec{a}$.

Свойство 3. $(x+y)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}$.

Свойство 4. $x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}$.

Напомним следующее характерное свойство коллинеарности векторов, доказанное в курсе планиметрии:

Теорема 34.1 *(о коллинеарных векторах)*

Вектор $\vec{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}=x\vec{b}$.

34.5. Скалярное умножение векторов

Напомним, что **скалярным произведением двух ненулевых векторов** называется произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Поэтому согласно определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi, \qquad (34.1)$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Напомним, что **углом между двумя ненулевыми векторами** называется величина образуемого ими угла, когда они отложены от одной точки (рис. 189). Из леммы 14.1 об углах с сонаправленными сторонами вытекает, что *угол между векторами не зависит от выбора той точки, от которой они откладываются.*

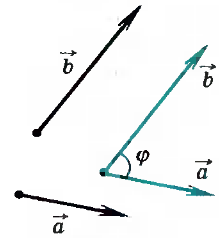


Рис. 189

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ нулевой, то считается по определению, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Выделяют два важных частных случая:

1) Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\varphi = 0°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и из (34.1) следует, что $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ обозначается $\vec{a}^2$ и называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$.

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ *тогда и только тогда, когда векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *перпендикулярны*. Действительно, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ равносильно тому, что $\cos\varphi = 0$, т. е. $\vec{a} \perp \vec{b}$. Если же среди векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть нулевой, то он по определению перпендикулярен любому вектору.

Наконец, напомним три основных свойства скалярного умножения:

Свойство 1

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Свойство 2

$(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого числа x.

Свойство 3

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Первые два из этих свойств относятся к планиметрии и доказаны там. Справедливость же свойства 3 будет установлена нами в § 37, после того как будет выведена формула, выражающая скалярное произведение векторов через координаты.

Задачи

Разбираемся в решении

34.1.(3). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Докажите, что для всякой точки O выполняется равенство

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OC}.$$

Решение

Запишем первое из этих равенств: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OD}$. Оно равносильно такому: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OC_1}$, которое, в свою очередь, равносильно такому: $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{C_1B_1}$ (?). Но последнее равенство в параллелепипеде выполняется. Аналогично доказывается и второе равенство.

Что же интересного в этой простой задаче?

Для начала заметим, что в решении нам понадобился не весь параллелепипед, а только два его диагональных сечения. Эти диагональные сечения AB_1C_1D и DA_1B_1C являются параллелограммами (рис. 190). Так что у нас задача не про параллелепипед, а про параллелограммы, точнее, про один параллелограмм — AB_1C_1D, потому что для второго надо доказать то же, что и для первого. Выглядит она так: «Пусть $T_1T_2T_3T_4$ — параллелограмм, а точка O — произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OT_1}+\overrightarrow{OT_3}=\overrightarrow{OT_2}+\overrightarrow{OT_4}$».

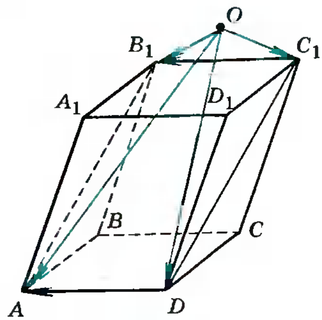


Рис. 190

Кроме того, мы в решении нигде не использовали то обстоятельство, что задана неплоская фигура. Что из этого следует? А то, что данную задачу можно переформулировать как задачу планиметрии (?). Тем не менее решение будет точно таким же.

Вот это и стоит запомнить. Именно: при решении задач векторным способом может оказаться, что решение не зависит от размерности заданных фигур. Поэтому, решив векторным способом планиметрическую задачу, посмотрите, не проходит ли это же решение в пространстве. И наоборот.

Рисуем

34.2.(3). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{AX}$, если:

а) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D_1B_1}$; б) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C_1D_1}$; в) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}$;

г) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{DB}$; д) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD_1}$; е) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD_1}-\overrightarrow{A_1C_1}$;

ж) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{B_1D}-\overrightarrow{D_1B}-\overrightarrow{A_1C}-\overrightarrow{AC_1}$.

34.3.(3). Проиллюстрируйте на параллелепипеде векторные равенства:

а) $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}=(\vec{a}-\vec{c})+\vec{b}$;

б) $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}=(\vec{a}-\vec{c})-\vec{b}$;

в) $\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}$.

Представляем

34.4.(2) Какую фигуру образуют концы равных векторов, отложенных от всех точек: а) прямой; б) плоскости; в) треугольника; г) тетраэдра; д) шара?

34.5.(2). От каждой точки X сферы с центром O отложили вектор $\overrightarrow{XY}$, равный $\overrightarrow{OX}$. Какую фигуру образуют точки Y? Как изменится результат, если от каждой точки этой сферы отложить вектор $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{KX}$, где K — произвольная точка?

34.6.(2). Из каждой точки X поверхности правильного многогранника проводится вектор $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{OX}$, где точка O — центр многогранника. Какую фигуру образуют точки Y?

Находим величину

34.7.(5). Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ единичные, $\angle\vec{a}\,\vec{b}=30°$, $\angle\vec{b}\,\vec{c}=45°$, $\angle\vec{c}\,\vec{a}=60°$. Вычислите: а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$; б) $\frac{1}{2}\vec{b}\cdot 4\vec{c}$; в) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}$; г) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$; д) $(3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})\cdot(\vec{b}+2\vec{c})$; е) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.

34.8.(5). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Вычислите произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и: а) $\overrightarrow{C_1D_1}$; б) $\overrightarrow{D_1D}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{B_1D_1}$; д) $\overrightarrow{A_1C}$; е) $\overrightarrow{B_1D}$.

34.9.(5). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Вычислите произведения: а) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$; б) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BK}$, где точка K — центр грани APC; д) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{LM}$, где точка L — середина ребра AC, а точка M — середина ребра PB.

34.10.(5). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромбоид с ребром 1, причем при вершине A сходятся углы трех граней, равные 60°. Вычислите те же произведения, что и в задаче 34.8.

Доказываем

34.11.(3). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Докажите, что равны векторы: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$; $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}$; $\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{A_1C}$; $\overrightarrow{DC_1}-\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{AB_1}$; $\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{A_1C}$.

34.12.(3). Даны три вектора. Сумма каждых двух из них параллельна одной и той же плоскости. Докажите, что сумма всех трех также параллельна этой плоскости. Изменится ли результат, если вместо сумм брать алгебраические суммы?

Исследуем

34.13.(2). Пусть на каждом ребре многогранника задан один вектор. Его длина равна длине ребра. Может ли быть, что: а) среди этих векторов нет равных; б) для каждого вектора найдется равный?

34.14.(2). Даны два многогранника. На каждом ребре каждого из них задан один вектор. Длина этого вектора равна длине ребра. При этом для каждого вектора одного из них можно найти равный ему вектор в другом. а) Будет ли у этих многогранников одинаковое число вершин, ребер, граней? б) Пусть один из многогранников правильный. Будет ли другой правильным? в) Пусть один из многогранников выпуклый. Будет ли другой выпуклым? Как выглядит аналогичная задача на плоскости?

34.15.(3). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Укажите такую точку X, что верно равенство $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{XC_1}+\overrightarrow{XD_1}=\vec{0}$. Решите такую же задачу для другого многогранника. Единственна ли такая точка?

34.16.(3). а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Рассматриваются все векторы, заданные его ребрами (на каждом ребре по одному вектору). Можно ли составить из них сумму, равную $\vec{0}$? б) Решите такую же задачу, если дан тетраэдр. в) Решите такую же задачу для другого многогранника.

34.17.(3). Может ли выполняться равенство для ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, не параллельных одной плоскости: а) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$; б) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|$?

34.18.(3). На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы $AKLB$, $BMNC$, $CPQA$ (порядок обхода вершин этих параллелограммов один и тот же). Можно ли составить треугольник из отрезков: а) LM, NP, QK; б) LP, MQ, NK?

34.19.(3). Выберем какой-нибудь многогранник. На каждом ребре его зададим один вектор. Длина этого вектора равна длине ребра. Все эти векторы пронумеруем. Выберем произвольную точку пространства. Отложим от нее первый вектор, от его конца отложим второй и так далее до последнего. Сможем ли мы задать и пронумеровать векторы так, чтобы в результате попасть в начальную точку? Как выглядит аналогичная задача на плоскости?

34.20.(4). Можно ли составить: а) треугольник из медиан данного треугольника; б) замкнутую ломаную из отрезков, идущих из каждой вершины тетраэдра в точку пересечения медиан противоположной грани?

34.21.(4). $PABC$ — тетраэдр. Какую фигуру образуют точки X, такие, что: а) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$; б) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$; в) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant1,\ 0\leqslant\beta\leqslant1,\ 0\leqslant\gamma\leqslant1)$?

34.22.(5). Дан правильный октаэдр с ребром 1. Какие значения принимает скалярное произведение векторов, заданных его вершинами? Сможете ли вы решить аналогичную задачу для правильного икосаэдра?

34.23.(5). Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а точка P — произвольная точка пространства. Верны ли такие равенства: а) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$; б) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$? Проверьте обратные утверждения.

34.24.(5). Пусть $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}|$. Можно ли по этим данным узнать углы между ненулевыми векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$? Можно ли уменьшить число равенств в условии?

34.25.(5). Какой фигурой в пространстве является множество точек X, таких, что: а) $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA}=1$; б) $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA}<1$; в) $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA}\geqslant-1$; г) $|\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA}|\leqslant 1$, где O и A — данные точки?

Участвуем в олимпиаде

34.26.(5). Пусть $ABCD$ — тетраэдр. Докажите, что: а) $AB\cdot CD=\frac{1}{2}(AD^2+BC^2-AC^2-BD^2)$; б) $|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}|\geqslant\frac{1}{2}|AC^2+BD^2-AD^2-BC^2|$.

§ 35. Разложение вектора на составляющие

35.1. Составляющие вектора

Напомним, что **составляющими данного вектора** называются векторы, дающие в сумме этот вектор. В планиметрии доказали, что *каждый вектор на плоскости можно единственным образом разложить на составляющие, лежащие на двух данных пересекающихся прямых* (рис. 191, *а*).

В пространстве разложим вектор либо на две составляющие параллельные данным прямой и плоскости, либо на три составляющие, параллельные трем пересекающимся прямым, не лежащим в одной плоскости.

Так, вес груза, висящего на треноге, разлагается на три составляющие, направленные вдоль ног треноги (рис. 191, *б*). Устойчивость мостов, куполов и сводов зданий и других строительных конструкций основана на расчете разложения силы тяжести на составляющие, проходящие через точки опоры. Вспомните, например, знаменитого «Медного всадника», опирающегося лишь на три точки.

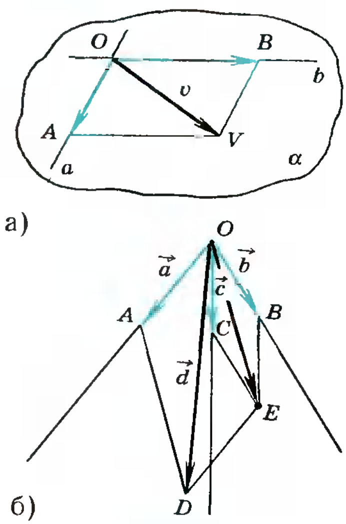


Рис. 191

1. Разложение вектора по прямой и плоскости. Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая a. Возьмем какой-нибудь вектор $\vec{v}$ и отложим его от точки пересечения α и a — точки O. Получим $\overrightarrow{OV}=\vec{v}$ (рис. 192). Пусть точка A — проекция точки V в направлении прямой a на плоскость α. Тогда

$$\overrightarrow{OV}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AV} \tag{35.1}$$

и векторы $\vec{v}_a=\overrightarrow{AV}$ и $\vec{v}_\alpha=\overrightarrow{OA}$ являются составляющими вектора $\overrightarrow{OV}=\vec{v}$ по прямой a и плоскости α, т. е. $\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_\alpha$.

Докажем, что полученное разложение единственно. Допустим, что имеются два разложения вектора $\vec{v}$ по прямой a и плоскости α, т. е. $\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_\alpha$ и $\vec{v}=\vec{v}'_a+\vec{v}'_\alpha$. Тогда $\vec{v}_a+\vec{v}_\alpha=\vec{v}'_a+\vec{v}'_\alpha$ и $\vec{v}_a-\vec{v}'_a=\vec{v}'_\alpha-\vec{v}_\alpha$. Вектор $\vec{v}_a-\vec{v}'_a$ параллелен прямой a, а вектор $\vec{v}'_\alpha-\vec{v}_\alpha$ параллелен плоскости α, пересекающей прямую a. Поэтому они не могут быть равны, кроме того случая, когда оба они нуль-векторы: $\vec{v}_a-\vec{v}'_a=\vec{0}$ и $\vec{v}'_\alpha-\vec{v}_\alpha=\vec{0}$, т. е. $\vec{v}_a=\vec{v}'_a$ и $\vec{v}_\alpha=\vec{v}'_\alpha$. Два разложения оказались одинаковыми. Значит, разложение однозначно.

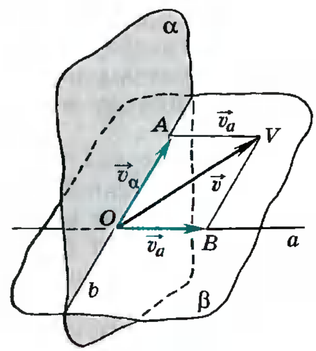


Рис. 192

2. Разложение вектора по трем прямым. Возьмем три прямые a, b, c, пересекающиеся в точке O и не лежащие в одной плоскости. Отложим от O данный вектор $\vec{v}=\overrightarrow{OV}$ (рис. 193). Приняв плоскость, проходящую через прямые b и c, за α, разложим вектор $\vec{v}$ по прямой a и плоскости α. Получим $\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_\alpha$. Составляющую $\vec{v}_\alpha$ разложим по прямым b и c. Получим $\vec{v}_\alpha=\vec{v}_b+\vec{v}_c$. А тогда $\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_b+\vec{v}_c$, т. е. получено искомое разложение вектора $\vec{v}$ по прямым a, b, c.

Разложение вектора по трем прямым сводится к разложению его по двум прямым лишь тогда, когда точка V лежит в одной из плоскостей, определяемых парами прямых a и b, a и c, b и c. В общем же случае, когда это не так, построение составляющих $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$ сводится к построению параллелепипеда, диагональю

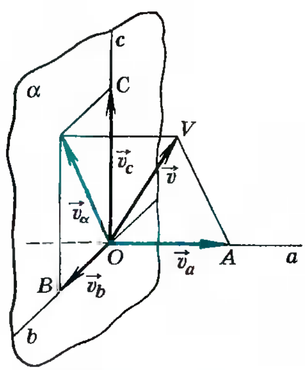


Рис. 193

которого является отрезок OV и ребра которого, исходящие из O, лежат на прямых a, b, c. Три плоскости граней этого параллелепипеда определяются тремя парами пересекающихся прямых: a и b, a и c, b и c, а три другие плоскости его граней параллельны этим плоскостям и проходят через точку V (рис. 194).

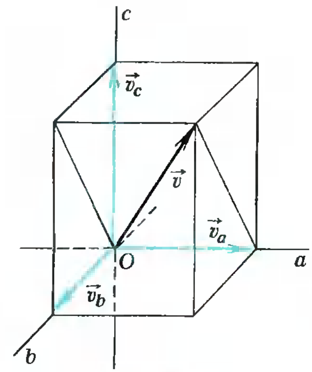


Рис. 194

Единственность разложения вектора по трем прямым доказывается так. Допустим, мы получили два разложения вектора $\vec{v}$ по трем прямым a, b, c, т. е. $\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_b+\vec{v}_c$ и $\vec{v}=\vec{v}\,'_a+\vec{v}\,'_b+\vec{v}\,'_c$. Тогда $\vec{v}_b+\vec{v}_c$ и $\vec{v}\,'_b+\vec{v}\,'_c$ параллельны плоскости α и, как доказали в предыдущем случае, $\vec{v}_a=\vec{v}\,'_a$ и $\vec{v}_b+\vec{v}_c=\vec{v}\,'_b+\vec{v}\,'_c$. Но тогда согласно единственности разложения вектора в плоскости по двум прямым $\vec{v}_b=\vec{v}\,'_b$ и $\vec{v}_c=\vec{v}\,'_c$.

Итак, мы решили две задачи на построение составляющих. Решение задачи на построение дает, как мы знаем, доказательство существования объекта, который строится. Поэтому мы доказали две теоремы существования.

Теоремам существования составляющих соответствуют теоремы единственности: доказано, что в каждом случае разложение на составляющие для данного вектора только одно, т. е., каким бы способом ни получили составляющие данного вектора в каждом из двух указанных способов, составляющие получаются те же самые. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 35.1

Всякий вектор допускает, и притом единственное, разложение на составляющие в каждом из двух случаев:

1) по пересекающимся прямым и плоскости;

2) по трем прямым, не параллельным одной плоскости.

35.2. Теорема о составляющих вектора

Из теоремы 35.1 вытекает следующая теорема:

Теорема 35.2

При сложении векторов их соответствующие составляющие (по прямой или плоскости) складываются. При умножении вектора на число их соответствующие составляющие умножаются на это число.

Доказательство. Докажем эту теорему, например, для случая разложения вектора по прямой a и пересекающей ее плоскости α (для разложения по трем непараллельным одной плоскости прямым доказательство аналогично). Возьмем любые векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$, и пусть вектор $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$. Разложим векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ на составляющие по a и α:

$$\vec{u}=\vec{u}_a+\vec{u}_\alpha,$$

$$\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_\alpha, \quad \vec{w}=\vec{w}_a+\vec{w}_\alpha.$$

Так как

$$\vec{w}=\vec{u}+\vec{v},$$

то

$$\vec{w}=\vec{u}_a+\vec{u}_\alpha+\vec{v}_a+\vec{v}_\alpha=(\vec{u}_a+\vec{v}_a)+(\vec{u}_\alpha+\vec{v}_\alpha).$$

Поскольку $\vec{u}_a \parallel a$ и $\vec{v}_a \parallel a$, то $(\vec{u}_a+\vec{v}_a) \parallel a$. Аналогично $(\vec{u}_\alpha+\vec{v}_\alpha) \parallel \alpha$. Итак, векторы $\vec{u}_a+\vec{v}_a$ и $\vec{u}_\alpha+\vec{v}_\alpha$ являются составляющими вектора $\vec{w}$ по прямой a и плоскости α. В силу единственности разложения на такие составляющие получаем, что $\vec{w}_a=\vec{u}_a+\vec{v}_a$ и $\vec{w}_\alpha=\vec{u}_\alpha+\vec{v}_\alpha$, т. е. при сложении векторов их составляющие складываются.

Умножим теперь вектор $\vec{u}$ на число x. Получим $\vec{t}=x\vec{u}$. Разложим вектор $\vec{t}$ по прямой a и плоскости α. Получим $\vec{t}=\vec{t}_a+\vec{t}_\alpha$. Так как $\vec{t}=x\vec{u}_a+x\vec{u}_\alpha$, то векторы $x\vec{u}_a$ и $x\vec{u}_\alpha$ являются тоже составляющими вектора $\vec{t}$ по прямой a и плоскости α. Поэтому $\vec{t}_a=x\vec{u}_a$ и $\vec{t}_\alpha=x\vec{u}_\alpha$. Теорема полностью доказана. ■

Замечание. Доказав теоремы о составляющих векторов, мы попутно доказали ряд свойств параллельного проектирования. Так, при разложении вектора по прямой a и плоскости α его составляющая по α получается в результате параллельного проектирования на эту плоскость в направлении прямой a. Параллельная проекция вектора может рассматриваться как параллельная проекция отрезка, не надо только учитывать направления. Поэтому теорема о том, что при умножении вектора на число его составляющая умножается на это же число, дает такое свойство параллельного проектирования: если два отрезка лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то отношение их длин равно отношению длин их проекций.

35.3. Разложение векторов по базису

Все, что мы знаем о векторах, позволяет нам дать ответ на такой вопрос: сколько и каких векторов на прямой, на плоскости и в пространстве надо задать, чтобы через них с помощью операций сложения векторов и умножения вектора на число можно было бы однозначно выразить любой вектор данной прямой, данной плоскости или пространства? Система таких векторов, через которые однозначно выражаются остальные векторы, называется **базисом** (на прямой, на плоскости или в пространстве). Порядок векторов в этой системе считается заданным.

1. Базисом на прямой является любой ненулевой вектор.

Действительно, пусть даны прямая l и ненулевой вектор $\vec{a} \parallel l$ (рис. 195). Тогда по теореме 34.1 любой вектор $\vec{v} \parallel l$ представляется в виде

$$\vec{v} = x\vec{a}. \qquad (35.2)$$

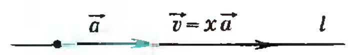


Рис. 195

По теореме 34.1 такое представление единственно. ■

2. Базисом на плоскости является любая пара непараллельных (неколлинеарных) векторов.

Действительно, пусть даны плоскость α и любые непараллельные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на этой плоскости (рис. 196). Так как $\vec{a}$ и $\vec{b}$ непараллельны, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы. Проведем в α любые прямые a и b, параллельные соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Любой вектор $\vec{v}$ плоскости α можно разложить на составляющие по прямым a и b:

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_b. \qquad (35.3)$$

Так как $\vec{v}_a \parallel \vec{a}$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то по теореме 34.1 $\vec{v}_a = x\vec{a}$. Аналогично $\vec{v}_b = y\vec{b}$. Подставляя эти выражения в (35.3), получаем искомое представление вектора $\vec{v}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}. \qquad (35.4)$$

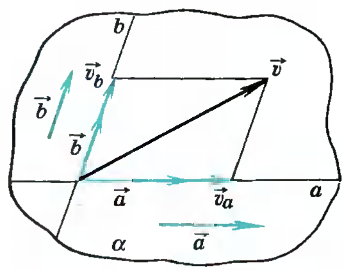


Рис. 196

Докажем, что такое представление единственно. Предположим, что, кроме (35.4), вектор $\vec{v}$ допускает еще одно аналогичное выражение через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{v} = x'\vec{a} + y'\vec{b}. \qquad (35.5)$$

Из (35.4) и (35.5) следует равенство

$$(x-x')\vec{a}=(y'-y)\vec{b}. \qquad (35.6)$$

Поскольку $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, то равенство (35.6) возможно лишь в том случае, когда $x-x'=y'-y=0$, т. е. $x'=x$, $y'=y$. Итак, непараллельные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются базисом в плоскости α. ■

3. Базисом в пространстве является любая тройка векторов, непараллельных одновременно никакой плоскости (такие векторы называются **некомпланарными**).

Другими словами, какие бы три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ мы ни взяли, любой вектор $\vec{v}$ в пространстве однозначно выражается через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равенством

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}. \qquad (35.7)$$

Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству, проведенному в случае плоскости. Проведите его самостоятельно (рис. 197). ■

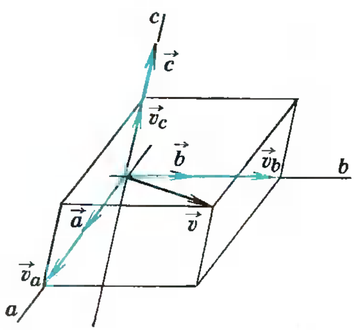


Рис. 197

Имеют место и обратные утверждения, т. е. ***любой базис на прямой состоит из одного ненулевого вектора, любой базис на плоскости состоит из двух неколлинеарных векторов, а любой базис в пространстве состоит из трех некомпланарных векторов.***

Докажите их самостоятельно. Объясните, например, почему одного вектора на плоскости для базиса мало, а трех много.

То, что число векторов в базисе на прямой, на плоскости и в пространстве равно соответственно единице, двум и трем, является еще одним способом определить их размерность: прямая одномерна, плоскость двумерна, пространство трехмерно.

Числовые коэффициенты, которые стоят в правых частях равенств (35.2), (35.4) и (35.7), выражающих вектор $\vec{v}$ на прямой, на плоскости и в пространстве через базисные векторы, называются **координатами вектора $\vec{v}$ в данном базисе.** На прямой вектор имеет одну координату, на плоскости — две, в пространстве — три. Координаты вектора зависят от выбора базиса. В п. 37.4 мы установим зависимость между координатами векторов и координатами точек.

Координаты векторов, как и их составляющие, обладают следующими свойствами: ***при сложении векторов их одноименные координаты склады-***

ваются, а при умножении вектора на число они умножаются на то же число. Докажите.

Для любых двух базисов на прямой, на плоскости и в пространстве определяются понятия **одинаковой** или **различной ориентированности** этих базисов.

На прямой два базиса одинаковой ориентации — это просто два сонаправленных вектора, а два базиса различной ориентации — это два противоположно направленных вектора.

На плоскости два базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, и $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ считаются одинаково ориентированными, если кратчайшие повороты от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от $\vec{a}'$ к $\vec{b}'$ происходят в одном направлении, и базисы считаются ориентированными различно, если эти повороты идут в противоположных направлениях.

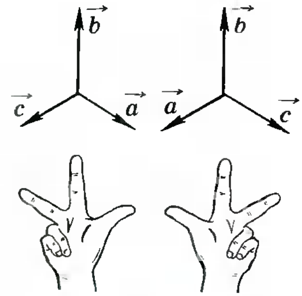


Рис. 198

Чтобы ввести аналогичные понятия для двух базисов в пространстве, сначала определим, что такое правые и левые тройки векторов.

Тройка базисных векторов в пространстве называется **правой (левой)**, если эти векторы, отложенные от одной точки, располагаются так, как расположены соответственно большой, указательный и средний пальцы правой (левой) руки (рис. 198).

В том случае, когда имеются две правые или две левые тройки векторов, говорят, что эти тройки (базисы) имеют одинаковую ориентацию или что они ориентированы одинаково.

Если же из двух данных базисов один является правой тройкой, а другой — левой тройкой векторов, то говорят, что эти базисы имеют различную ориентацию или что они ориентированы противоположно.

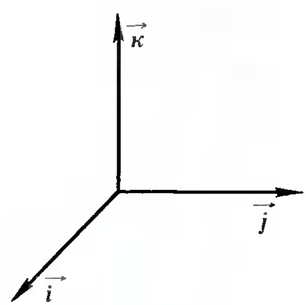


Рис. 199

Чаще всего базисными векторами берутся попарно перпендикулярные (ортогональные) векторы единичной длины (рис. 199). Такие базисы называются **ортонормированными.** Векторы в этих базисах обозначаются обычно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Выбираются они так, чтобы образованная ими тройка векторов была правой.

35.4. Радиус-вектор

Напомним, что **радиус-вектором** точки X с началом в точке O называется вектор $\overrightarrow{OX}$ (рис. 200).

Если в пространстве задана некоторая точка O, то *радиус-векторы точек с началом в точке O позволяют установить взаимно однозначное соот-*

ветствие между множеством точек пространства и множеством векторов в пространстве. А именно каждой точке X ставится в соответствие вектор $\vec{v}$, определяемый ее радиус-вектором $\overrightarrow{OX}$, т. е. $\vec{v}=\overrightarrow{OX}$. Обратно: каждый вектор $\vec{v}$ откладывается от точки O: $\vec{v}=\overrightarrow{OX}$ — и ему ставится в соответствие конец направленного отрезка $\overrightarrow{OX}$ — точка X.

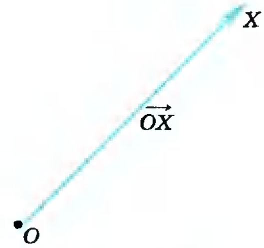


Рис. 200

Ясно, что когда точка O задана, то разные точки имеют различные радиус-векторы, и наоборот, поскольку от каждой точки каждый вектор можно отложить лишь единственным образом, то разным векторам соответствуют разные точки.

С помощью радиус-вектора удобно задавать в пространстве прямые и плоскости, а также их части — лучи, отрезки, полуплоскости.

Возьмем сначала какую-нибудь прямую a в пространстве. Ее положение вполне определяется заданием любой точки $A \in a$ и любого ненулевого вектора $\vec{m} \parallel a$ (рис. 201).

Ненулевой вектор $\vec{m} \parallel a$ называется направляющим вектором прямой a.

Выберем в пространстве любую точку O. Тогда радиус-вектор $\overrightarrow{OX}$ любой точки $X \in a$ равен такой сумме:

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}. \qquad (35.8)$$

Так как $\overrightarrow{AX} \parallel \vec{m}$ и $\vec{m} \neq \vec{0}$, то согласно признаку параллельности векторов (теорема 34.1)

$$\overrightarrow{AX}=t\vec{m}, \qquad (35.9)$$

где t — некоторое действительное число. Введя обозначения $\overrightarrow{OX}=\vec{r}$ и $\overrightarrow{OA}=\vec{r}_0$, из (35.8) и (35.9) получим:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{m}. \qquad (35.10)$$

Это равенство и задает прямую a: когда параметр t пробегает все множество действительных чисел, точка X пробегает всю прямую (проверьте!).

Каждой точке X прямой a соответствует некоторое единственное значение параметра t_X, при котором $\overrightarrow{OX}=\vec{r}_0+t_X\vec{m}$; в частности, точке A соответствует $t_A=0$.

Отрезку XY на прямой a соответствует в области параметров числовой отрезок $[t_X;\ t_Y]$, если $t_X<t_Y$.

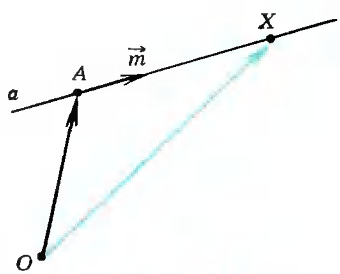


Рис. 201

Векторное уравнение некоторого отрезка AB удобно написать, зная радиус-векторы его концов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рис. 202, *а*).

Точка X лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX}=t\overrightarrow{AB}$, где $t\in[0;\ 1]$. Так как $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$, откуда

$$\overrightarrow{OX}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}. \qquad (35.11)$$

Равенством (35.11) и задается отрезок AB: когда параметр t возрастает от 0 до 1, точка X пробегает отрезок AB от точки A до точки B.

Теперь рассмотрим случай плоскости. Зададим некоторую плоскость α любой ее точкой $A\in\alpha$ и парой лежащих в α непараллельных векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (рис. 202, *б*). Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ называются направляющими векторами плоскости α. Они образуют базис в плоскости α. Любой вектор $\overrightarrow{AX}$, где X — произвольная точка плоскости α, можно разложить по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (так как $AX\|\alpha$):

$$\overrightarrow{AX}=t\vec{m}+s\vec{n}. \qquad (35.12)$$

Поскольку $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}$, то, подставляя в это равенство выражение (35.11) и полагая, как и раньше, $\overrightarrow{OA}=\vec{r}_0$ и $\overrightarrow{OX}=\vec{r}$, окончательно получаем:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{m}+s\vec{n}. \qquad (35.13)$$

Это уравнение задает плоскость α в пространстве: положение любой точки $X\in\alpha$ определится заданием упорядоченной пары действительных чисел (t, s), причем каждой такой паре соответствует некоторая точка плоскости α в системе координат с началом в точке A и базисными векторами $\vec{m}$, $\vec{n}$. Точке A отвечает пара (0, 0).

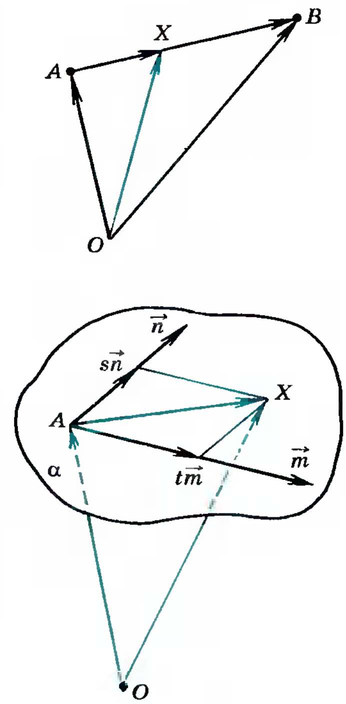


Рис. 202

35.5. Векторный метод

Сложение векторов и умножение вектора на число составляют основу векторной алгебры — раздела математики, изучающего векторы. Векторная алгебра является одним из основных средств исследования в физике и в разных разделах математики. Например, в векторной форме записываются многие законы физики, в частности законы механики. И в геометрии аппарат векторов позволяет кратко записывать формулировки задач, теорем и их решения, доказательства. Например, теорема о средней линии треугольника записывается так: $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (рис. 203), а ее доказательство пишется в одну строку:

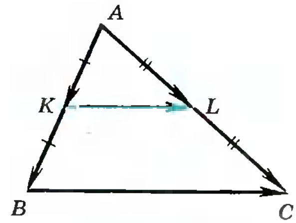


Рис. 203

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Проиллюстрируем векторный метод на задачах о тетраэдре.

Задача *(о средней линии тетраэдра). Пусть в тетраэдре ABCD точки K и L — середины ребер AB и CD* (рис. 204). Отрезок KL *назовем средней линией тетраэдра.*

Доказать, что:

1) *справедливо равенство*

$$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}); \qquad (35.14)$$

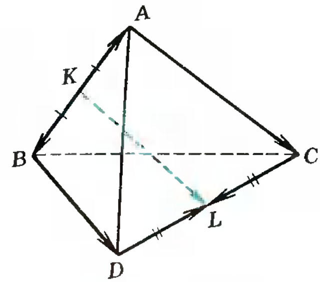


Рис. 204

2) $KL\leqslant\frac{1}{2}(AC+BD)$;

3) *отрезки AC, BD, KL параллельны одной плоскости;*

4) *все средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею пополам;*

5) *через эту точку проходит отрезок* AA_1, *где* A_1 *— центр масс грани BCD.*

Решение. 1) Запишем два равенства:

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CL} \text{ и } \overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DL}.$$

Сложим их и заметим, что $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{LD}=\vec{0}$ (по условию задачи).

Получим $2\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$. Отсюда получаем (35.14).

2) Переходя в (35.14) к модулям векторов, получаем:

$$KL=|\overrightarrow{KL}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|\leqslant\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|)=$$
$$=\frac{1}{2}(AC+BD).$$

3) Из равенства (35.14) следует, что если отложить векторы $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ от одной точки, то они будут

лежать в одной плоскости, параллельной скрещивающимся прямым AC и BD. Поэтому отрезки KL, AC и BD параллельны этой плоскости.

4) Пусть точки M и N — середины ребер AC и BD, а точка O — середина отрезка KL (рис. 205). Тогда KN — средняя линия грани ADB. Поэтому $\overrightarrow{KN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

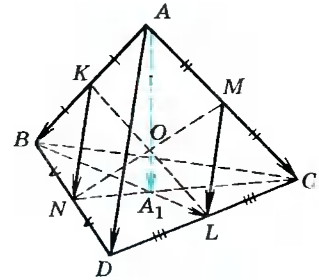


Рис. 205

Аналогично $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Тогда $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{LO}$ и $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{OK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Но $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{LO}$. Поэтому $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}$, т. е. O — середина отрезка MN.

5) Вычисляем:

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}=$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}).$$

Далее,

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BL}=$$
$$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}).$$

Итак, $\overrightarrow{AO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$. Значит, точка O лежит на отрезке AA_1 и делит его в отношении $AO:OA_1=3:1$.

Итак, мы доказали, что в точке O пересекаются не только все средние линии тетраэдра, но и все отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами масс противоположных граней. Она делит эти отрезки в отношении $3:1$. Точка O называется **центром масс тетраэдра.** ■

Отметим два обстоятельства. Во-первых, все проведенные доказательства не зависят от того, лежат точки A, B, C, D в одной плоскости или нет. Поэтому доказанные утверждения верны и для плоского четырехугольника $ABCD$. Во-вторых, первые два утверждения задачи можно обобщить для отрезка KL, когда точки K и L делят отрезки AB и CD не пополам, а в некотором отношении x, т. е. $AK:KB=CL:LD=x$. Сделайте это обобщение.

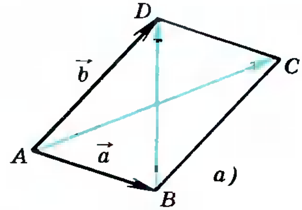
Еще одна задача потруднее: проследите, по какой линии движется середина отрезка KL, когда x изменяется от 0 до ∞.

Решенные векторным методом задачи пока использовали лишь операции сложения векторов и умножения вектора на число. А вот пример применения векторного метода с использованием операций скалярного умножения и разложения вектора по базису. Вам, наверное, известна следующая теорема:

сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Векторным методом ее доказать совсем просто.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ и выберем его стороны AB и AD за базис: $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$ (рис. 206, *а*).



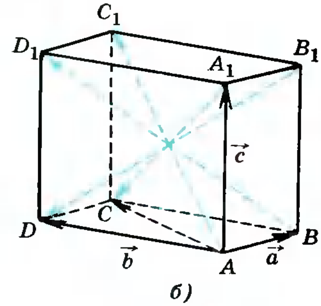


Рис. 206

Теперь разложим диагонали этого параллелограмма по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$:

$$\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b} \text{ и } \vec{BD}=\vec{b}-\vec{a}.$$

Возведя эти равенства в скалярный квадрат и сложив, получим:

$$AC^2+BD^2=(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{b}-\vec{a})^2=$$
$$=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2=2\vec{a}^2+2\vec{b}^2.$$

Поскольку $AB^2=CD^2=\vec{a}^2$ и $BC^2=AD^2=\vec{b}^2$, то $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$. ■

Итак, мы доказали векторным методом теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма. А нет ли аналога этой теоремы для параллелепипеда? Попробуем, используя векторный метод, его поискать.

Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и за базис выберем его ребра с вершиной в точке A, т. е. $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$, $\vec{AA_1}=\vec{c}$ (рис. 206, *б*). Разложим диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ по этому базису:

$$\vec{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}; \quad \vec{A_1C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c};$$
$$\vec{BD_1}=\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}; \quad \vec{B_1D}=\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}.$$

Тогда, снова сложив скалярные квадраты этих векторов, получим:

$$AC_1^2+A_1C^2+BD_1^2+B_1D^2=4\vec{a}^2+4\vec{b}^2+4\vec{c}^2,$$

т. е. сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

В заключение заметим, что если теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма несложно доказать и без векторов (подумайте, как это сделать), то ее пространственный аналог для параллелепипеда, не используя векторы, получить затруднительно.

Дополнение к параграфу 35

Центры масс и выпуклые оболочки

Векторный метод позволяет установить интересную зависимость между физическим понятием центра масс системы материальных точек S: $(A_1; m_1)$, ..., $(A_k; m_k)$ — и геометрическим понятием выпуклой оболочки системы точек A_1, ..., A_k. А именно мы сейчас докажем, что выпуклая оболочка P этой системы точек является множеством всевозможных центров масс системы S в случае, когда массы m_1, ..., m_k принимают любые неотрицательные значения. Если через Q обозначить множество центров масс системы S, то нам предстоит доказать равенство $P=Q$, т. е. доказать два включения $P \subset Q$ и $Q \subset P$.

О понятии центра масс системы S мы уже говорили в § 24 п. 7 «Геометрии, 8—9» (М.: Просвещение, 1996). Напомним, что точка M называется центром масс системы материальных точек S: (A_1, m_1), ..., (A_k, m_k), если радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ выражается равенством

$$\overrightarrow{OM}=\frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+\ldots+m_k\overrightarrow{OA_k}}{m_1+\ldots+m_k}. \qquad (1)$$

Конечно, мы полагаем, что среди масс m_1, ..., m_k есть положительные массы.

Мы уже доказывали в «Геометрии, 8—9», что положение точек M, определяемое равенством (1), не зависит от выбора точки O. (Проверьте еще раз этот факт!)

Ясно, что положение центра масс системы S не изменится, если все массы изменятся пропорционально. Поэтому удобно сделать замену масс m_1, ..., m_k массами $\mu_1=\frac{m_1}{m_1+\ldots+m_k}$, ..., $\mu_k=\frac{m_k}{m_1+\ldots+m_k}$, для которых $\mu_1+\ldots+\mu_k=1$. Кроме того, полагаем $\overrightarrow{OA_1}=\vec{r}_1$, ..., $\overrightarrow{OA_k}=\vec{r}_k$.

Перейдем теперь к доказательству равенства $P=Q$. Начнем с включения $P\subset Q$. Оно будет установлено, если мы докажем, что, во-первых, все точки A_1, ..., A_k содержатся в Q и, во-вторых, что Q — выпуклое множество. Первое из этих утверждений очевидно. Действительно, если положить $\mu_i=1$, а все остальные $\mu_j=0$ для $j\neq i$, то получим, что $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA_i}$, т. е. $M=A_1$. Поэтому Q содержит все точки A_1, ..., A_k.

Чтобы убедиться, что Q выпукло, надо взять любые две точки $M\in Q$ и $M'\in Q$ и показать, что отрезок $MM'\subset Q$.

Пусть точке M соответствует набор масс μ_1, ..., μ_k, $\mu_1+...+\mu_k=1$, а точке M' — набор масс μ'_1, ..., μ_k, $\mu'_1+...+\mu'_k=1$. Возьмем любую точку X отрезка MM'. Ее радиус-вектор $\overrightarrow{OX}$ задается равенством

$$\overrightarrow{OX}=(1-t)\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{OM'}. \qquad (2)$$

Проверим, что точка X является центром для такого набора масс:

$$\mu''_1=(1-t)\,\mu_1+t\mu'_1,\ ...,\ \mu''_k=(1-t)\,\mu_k+t\mu'_k.$$

Сумма этих масс тоже равна единице, так как

$$\mu''_1+...+\mu''_k=(1-t)\,(\mu_1+...+\mu_k)+t\,(\mu'_1+...+\mu'_k)=1.$$

Поэтому центром для набора масс μ''_1, ..., μ''_k является точка Y, для которой

$$\overrightarrow{OY}=\mu''_1\vec{r}_1+...+\mu''_k\vec{r}_k=((1-t)\,\mu_1+t\mu'_1)\vec{r}_1+...+$$
$$+((1-t)\,\mu_k+t\mu'_k)\vec{r}_k=(1-t)(\mu_1\vec{r}_1+...+\mu_k\vec{r}_k)+$$
$$+t\,(\mu'_1\vec{r}_1+...+\mu'_k\vec{r}_k)=(1-t)\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{OM'}. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) следует, что $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OY}$, а потому $X=Y$. Итак, множество Q выпукло, а потому $P\subset Q$.

Установим теперь включение $Q\subset P$. Как мы знаем (см. п. 24.3), множество Q является выпуклым многогранником, вершинами которого являются некоторые из точек A_1, ..., A_k (этот многогранник может выродиться в многоугольник, если все точки A_1, ..., A_k лежат в одной плоскости, и в отрезок, если все они лежат на одной прямой).

Возьмем любую точку $M\in Q$ и покажем, что $M\in P$. Пусть точке M соответствует набор масс μ_1, ..., μ_k, т. е.

$$\overrightarrow{OM}=\mu_1\vec{r}_1+...+\mu_k\vec{r}_k.$$

Напомним, что одним из свойств центров масс является такое свойство: если даны две системы S: (A_1, m_1), ..., (A_k, m_k) с центром M и Σ: (B_1, m'_1), ..., (B_l, m'_l) с центром M', то центр M'' объединенной системы $S \cup \Sigma$ можно получить как центр масс двухточечной системы $(M, m_1+...+m_k)$ и $(M', m'_1+...+m'_l)$.

Несложное, но довольно длинное доказательство этого утверждения мы оставляем читателю как упражнение в векторной алгебре.

Используя это свойство, будем теперь выбранную точку $M \in Q$ искать следующим образом. Ясно, что можно считать, что все $\mu_i > 0$.

Сначала найдем центр масс M_1 двух материальных точек (A_1, μ_1), (A_2, μ_2). Точка M_1 лежит на отрезке A_1A_2, который содержится в P. Затем построим центр масс M_2 двух материальных точек $(M_1, \mu_1+\mu_2)$, (A_3, μ_3). Он лежит на отрезке M_1A_3 и тоже содержится в P. Продолжая этот процесс и добавляя последовательно по точке A_4, ..., A_k, мы построим центр масс M, лежащий в множестве P.

Итак, $Q \subset P$. Так как и $P \subset Q$, то $P=Q$.

Задачи

Разбираемся в решении

35.1.(5). Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

Решение

Пусть дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок сделайте сами).

В качестве векторов базиса выберем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$. Рассмотрим диагонали AC_1 и B_1D. (С другими диагоналями вы разберитесь сами.)

Ключевым вектором выберем вектор $\overrightarrow{AX}$, где X — предполагаемая общая точка отрезков AC_1 и B_1D.

Имеем:

$$X \in AC_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AC_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})\ (0 \leqslant \lambda \leqslant 1). \quad (1)$$

$$X \in B_1D \Leftrightarrow \overrightarrow{B_1X} = t\overrightarrow{B_1D}\ (0 \leqslant t \leqslant 1). \quad (2)$$

Отсюда из (2) получаем $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AB_1}$ (?)

и далее $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AA_1}$ (?).

Оказалось, что ключевой вектор $\overrightarrow{AX}$ в одном и том же базисе имеет два представления:

$$\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AA_1},$$
$$\overrightarrow{AX}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AA_1}.$$

Но тогда $\begin{cases}\lambda=1-t,\\ \lambda=t,\end{cases}$ (?) откуда $t=\lambda=\frac{1}{2}$.

Таким образом, исходная система имеет решение. Значит, общая точка диагоналей AC_1 и B_1D существует. Далее, из того что $\lambda=\frac{1}{2}$, следует, что X — середина диагонали AC_1, а из того, что $t=\frac{1}{2}$, следует, что X — середина диагонали B_1D. Задача решена.

В решении аналогичных задач (на плоскости или в пространстве) векторным методом присутствуют такие моменты:

1. Выбор базиса (наиболее удобного для дальнейшей работы).
2. Выбор нужного нам «ключевого» вектора, который мы будем в этом базисе раскладывать двумя способами.
3. Получение двух разложений «ключевого» вектора. Сначала можно выражать его через любые векторы, но обязательно довести разложение до векторов базиса.
4. Составление и решение системы, связывающей неизвестные коэффициенты двух разложений вектора в базисе.
5. Проверка того, что полученные числовые значения для коэффициентов удовлетворяют наложенным на них условиям.
6. Окончательное истолкование полученных результатов, т. е. в безвекторной форме.

Дополняем теорию

35.2.(4). Пусть точки A и B не лежат в плоскости KLM. Докажите, что параллельность прямой AB и плоскости KLM равносильна равенству $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{KL}+\beta\overrightarrow{KM}$ (α, β — действительные числа).

35.3.(4). а) Докажите, что плоскость ABC может быть задана как множество точек X, таких, что $\overrightarrow{OX}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$, где $\alpha+\beta+\gamma=1$. б) Как можно задать треугольник ABC? Каков смысл коэффициентов α, β, γ?

35.4.(5). Точка T — точка пересечения медиан треугольника ABC, точка O — любая точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

Рисуем

35.5.(1). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Разложите вектор $\overrightarrow{DB_1}$ на составляющие по прямой и перпендикулярной ей плоскости, если данная плоскость: а) ABC; б) AA_1C_1; в) BA_1C; г) A_1BD.

35.6.(1). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, а точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра AP, точка L — середина ребра PB; точка M — середина ребра BC; точка N — середина ребра AC. Разложите вектор $\overrightarrow{PQ}$ на составляющие по прямой и перпендикулярной ей плоскости, если данная плоскость: а) APC; б) BKC; в) CKL; г) KLM; д) PMN.

35.7.(1). Пусть $PABC$ — тетраэдр. Точка Q — точка пересечения медиан основания, точка K — точка пересечения медиан грани PAC, точка L — середина ребра PA, а точка M — середина ребра BC. Разложите на составляющие по прямой PC и плоскости ABC такие векторы: а) $\overrightarrow{AP}$; б) $\overrightarrow{PQ}$; в) $\overrightarrow{BK}$; г) $\overrightarrow{KQ}$; д) $\overrightarrow{LM}$.

35.8.(1). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Точка K — середина ребра BB_1, точка L — центр симметрии грани CC_1D_1D, точка M — центр симметрии грани $A_1B_1C_1D_1$, точка N лежит на прямой A_1D, точка O лежит на прямой AB_1. Разложите на составляющие по трем ребрам параллелепипеда такие векторы: а) $\overrightarrow{B_1D}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{LM}$; д) $\overrightarrow{MN}$; е) $\overrightarrow{NO}$.

35.9.(1). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Точка K — центр симметрии грани CC_1D_1D, точка L — центр симметрии грани $A_1B_1C_1D_1$, точки P и Q лежат на скрещивающихся диагоналях двух смежных граней. 1) Разложите на составляющие по прямым AB, AD и AA_1 такие векторы: а) $\overrightarrow{D_1B}$; б) $\overrightarrow{B_1K}$; в) $\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{PQ}$. 2) Нарисуйте сумму двух каких-либо из данных здесь векторов и найдите ее разложение на составляющие по этим же прямым.

35.10.(1). Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра AC, точка L — центр грани APC, точка M — центр грани PBC, точка N — середина ребра PA, точка S — середина ребра BC. 1) Разложите на составляющие по прямым PA, PB, PC такие векторы: а) $\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{KM}$; в) $\overrightarrow{QL}$; г) $\overrightarrow{NS}$.
2) Нарисуйте разность двух каких-либо из данных векторов и найдите ее разложение на составляющие по этим же прямым.

Планируем

35.11.(3). Известны координаты трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Как найти координаты вектора $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$?

35.12.(3). Три вектора заданы своими координатами. Как вы установите, будут ли они параллельны одной плоскости? Приведите конкретный пример.

35.13.(3). Четыре вектора заданы своими координатами. Возьмите любой из них. Надо найти его разложение по трем оставшимся. Как вы будете действовать? Приведите пример.

35.14.(5). Известны шесть ребер тетраэдра. Как найти: а) угол между его противоположными ребрами; б) расстояние между серединами его противоположных ребер; в) расстояние между прямыми, на которых лежат противоположные ребра?

Находим величину

35.15.(1). К вершине A треножника $ABCD$ подвешен груз P. Ножки треножника AB, AC и AD равны, укреплены на горизонтальной плоскости, образуют между собой прямые углы, а с (BCD) равные углы. Найдите усилия в каждой из ножек треножника.

35.16.(2). Груз P висит на кронштейне, укрепленном на вертикальной стене. Кронштейн состоит из трех стержней AB, AC, AD, причем их концы B, C, D закреплены в стене. Груз подвешен в точке A. Стержни AB и AC равны, находятся в горизонтальной плоскости и образуют между собой прямой угол. Стержень AD образует со стержнями AB и AC равные углы, находится ниже их и составляет с вертикалью угол $60°$. Найдите усилия в каждом из стержней.
Изменится ли результат, если стержень AD будет выше стержней AB и AC при прочих тех же условиях?

35.17.(3). а) Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости. Найдите вектор $\vec{x}$ на этой плоскости, перпендикулярный $\vec{a}$. б) Составьте и решите аналогичную задачу в пространстве.

35.18.(3). а) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости. Найдите вектор $\vec{x}$, такой что $\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{a} = p, \\ \vec{x} \cdot \vec{b} = q, \end{cases}$ где p и q — заданные действительные числа. б) Решите аналогичную задачу в пространстве.

35.19.(5). Даны длины трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной точки, и углы между ними. Найдите длину диагонали параллелепипеда, выходящей из той же точки.

35.20.(5). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 точка X лежит на диагонали A_1D, причем $|DX|:|XA_1| = 1:2$, точка Y лежит на диагонали D_1C, причем $|D_1Y|:|YC| = 1:2$. Вычислите:
а) $|XY|$; б) $\angle(XY)(A_1D)$; в) $\angle(XY)(AD)$; г) $\angle(XY)(AC_1)$.

35.21.(5). В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 1 точка X лежит на ребре AP и $|PX|:|XA| = 1:2$, точка Y лежит на ребре BC и $|CY|:|YB| = 1:2$. Вычислите: а) $|XY|$; б) $\angle(XY)(PA)$; в) $\angle(XY)(PC)$.

35.22.(5). В правильной пирамиде $PABCD$ с ребром 1 точка K — середина ребра PA, точка L — середина ребра CD. Вычислите: а) $|KL|$; б) $\angle(KL)(PA)$; в) $\angle(KL)(DC)$; г) $\angle(KL)(AC)$.

Доказываем

35.23.(3). а) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются базисом на плоскости. Докажите, что равенство $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ равносильно условию $x=y=0$. б) Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ являются базисом в пространстве. Докажите, что $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\alpha=\beta=\gamma=0$.

35.24.(4). а) Докажите, что прямая и сфера не могут иметь больше двух общих точек. б) Пусть прямая, проходя через фиксированную точку A, пересекает данную сферу в некоторых точках X и Y. Докажите, что $\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AY}$ — величина постоянная.

35.25.(4). Докажите, что линия, общая для сферы и плоскости, является окружностью.

35.26.(4). Докажите, что длина общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых является расстоянием между ними. Докажите его существование.

35.27.(5). В тетраэдре $PABC$ точки K, L, M, N делят его ребра PA, PB, AC и CB в одном и том же отношении, считая от точек P и C. Докажите, что $(KL)\parallel(MN)$.

35.28.(5). В треугольной призме каждая вершина одного основания соединена отрезками с серединой того ребра другого основания, которое не лежит с данной вершиной в одной грани. Докажите, что эти отрезки пересекаются. В каком отношении они делятся точкой пересечения?

35.29.(5). В наклонной треугольной призме проведено сечение, пересекающее ее боковые ребра. Докажите, что центроид сечения лежит на прямой, проходящей через центроиды оснований.

35.30.(5). а) Пусть $PABC$ — тетраэдр. Точка X лежит на ребре AP, причем $|AX|=\frac{1}{3}|AP|$, точка Y лежит на ребре CB, причем $|CY|=\frac{1}{3}|CB|$. Докажите, что существует плоскость, параллельная прямым AC, XY, PB. б) Отрезки AC и PB равны. По ним одновременно и с одной скоростью стали двигаться точки X и Y (X от P к B, Y от A к C). Докажите, что (XY) остается параллельной одной и той же плоскости. Докажите, что точка Z, делящая отрезок XY в одном и том же отношении, движется по прямой.

35.31.(5). Докажите, что не существует плоскости, которой параллельны диагонали боковых граней треугольной призмы.

35.32.(5). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. В каком отношении плоскость KLM делит пересекающие ее ребра параллелепипеда, если: а) точка K — середина ребра AA_1, точка L — середина ребра B_1C_1, точка M — середина ребра CD; б) точки K, L, M делят те же ребра в отношении $1:2$, считая от точек A, B_1, C?

35.33.(5). Докажите, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра перпендикулярны.

35.34.(5). Докажите равносильность двух свойств тетраэдра: все его высоты пересекаются и противоположные ребра его перпендикулярны.

35.35.(5). Используя векторный аппарат, докажите: а) если $a\perp\alpha$ и $b\parallel a$, то $b\perp\alpha$; б) если $a\perp\alpha$ и $b\perp\alpha$, то $a\parallel b$.

Исследуем

35.36.(3). Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис пространства. Будут ли образовывать базис пространства векторы: а) $x\vec{a}$, $y\vec{b}$, $z\vec{c}$; б) $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{a}$; в) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{b}+x\vec{c}$, $\vec{c}+y\vec{a}$, $\vec{a}+z\vec{b}$, где x, y, z — действительные числа?

35.37.(3). Напишите систему двух линейных уравнений с двумя переменными. Дайте ей векторное истолкование. Исходя из него, исследуйте систему. Обобщите задачу.

35.38.(3). Пусть O_1 и O_2 — центры вписанного и описанного шаров для правильной пирамиды $PABC$. Сможете ли вы разложить на составляющие по прямым PA, PB и PC векторы $\overrightarrow{PO_1}$ и $\overrightarrow{PO_2}$?

35.39.(3). В треугольнике ABC проведена высота CD. Разложите вектор $\overrightarrow{CD}$ по $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$. Решите ли вы аналогичную задачу в пространстве?

35.40.(3). Возьмите правильный многогранник, отличный от тетраэдра и куба. Выберите какую-либо его вершину и три прямые, проходящие через ребра при этой вершине. Возьмите какой-либо вектор, заданный парой его вершин. Сможете ли вы разложить его на составляющие по этим прямым?

35.41.(4). Пусть $ABCD$ — тетраэдр. Существует ли такая точка X, что:

а) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}=\vec{0}$;

б) $\overrightarrow{XA}+2\overrightarrow{XB}+3\overrightarrow{XC}-5\overrightarrow{XD}=\vec{0}$;

в) $\frac{1}{5}\overrightarrow{XA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{XB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{XC}+\frac{1}{20}\overrightarrow{XD}=\vec{0}$?

Если существует, то единственная ли она? Как она расположена по отношению к тетраэдру? Попытайтесь обобщить эту задачу.

35.42.(4). Как расположены точки A, B, C, если известно, что

$$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0},\ \alpha+\beta+\gamma=0?$$

Каково решение аналогичной задачи для четырех точек?

35.43.(4). Сможете ли вы восстановить вершины тетраэдра, зная положение: а) середин его ребер; б) центров масс его граней?

35.44.(5). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершина A соединена отрезками с центром K грани CDD_1C_1. Вершина D соединена отрезками с центрами остальных граней. Какой из этих отрезков пересекает отрезок AK?

35.45.(5). Прямые a, b, c — три попарно пересекающиеся прямые одной плоскости. Прямая x образует с каждой из них один и тот же угол. Как она расположена по отношению к данной плоскости?

35.46.(5). Пусть A, B, C — данные точки. Какую фигуру образуют все такие точки X, что $XA^2+XB^2=XC^2$?

Участвуем в олимпиаде

35.47.(3). Четыре вектора таковы, что их длины равны и все углы между ними равны. Чему равна сумма этих векторов?

35.48.(5). В замкнутой четырехзвенной ломаной все звенья равны. Докажите, что углы между противоположными звеньями равны.

35.49.(5). Пусть AB — общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых a и b ($A \in a$, $B \in b$). Прямая c пересекает прямые a и b в точках K и L соответственно. Проверьте, что $\angle ca = \angle cb$ равносильно $AK = BL$.

35.50.(5). $ABCD$ — тетраэдр. Докажите, что:

а) $|DA|^2+|DB|^2+|DC|^2 \geqslant \frac{1}{3}(|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2)$;

б) $|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 \geqslant |AC|^2+|BD|^2$;

в) $|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2-(|DA|^2+|DB|^2+|DC|^2) \leqslant 4R^2$,
где R — радиус описанной около него сферы.

Рассуждаем

35.51.(1). Используя векторные отношения, сформулируйте утверждения, равносильные следующим: а) $X \in (ABC)$; б) (AB) и (KLM) пересекаются; в) (AB) и (CD) скрещиваются.

35.52.(1). Как найти разложение вектора на составляющие по трем прямым, если эти прямые попарно скрещиваются?

35.53.(1). Можно ли разложить вектор в пространстве на составляющие по: а) двум прямым; б) четырем и более прямым; в) двум плоскостям и более?

35.54.(3). Три вектора образуют базис в пространстве. Докажите, что любые два из них не параллельны между собой. Сформулируйте и проверьте обратное.

35.55.(3). Докажите, что в пространстве не может быть четырех ненулевых попарно ортогональных векторов.

§ 36*. Векторное умножение векторов

36.1. Определение векторного произведения векторов

Вы уже знакомы с операцией скалярного умножения двух векторов, в результате которой каждой паре векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ ставится в соответствие число — их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Вводя операцию скалярного умножения векторов, мы говорили о породивших ее задачах физики, когда взаимодействие двух векторных величин дает в результате скалярную величину (например, работу в результате действия силы при перемещении). Во многих других физических задачах результатом взаимодействия двух векторных величин является новая векторная величина. Математическое же описание этих физических процессов дается еще одной операцией с векторами — векторным умножением.

В результате этой операции каждой упорядоченной паре векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ ставится в соответствие вектор $\vec{c}$, который называется их **векторным произведением** и обозначается так: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

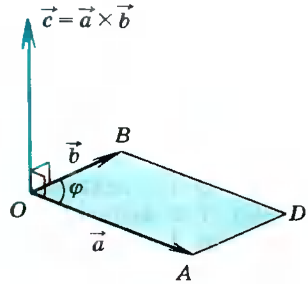


Рис. 207

Чтобы задать вектор $\vec{c}$, надо указать его направление и его модуль. Они определяются так. Сначала рассмотрим общий случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Отложим их от точки O. Получим $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ (рис. 207). Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ определят параллелограмм $OADB$. Модуль вектора $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ считается равным площади этого параллелограмма, т. е. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi=\angle\,\vec{a}\vec{b}$. Направление же вектора $\vec{c}$ выбирается так, чтобы он был перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (т. е. перпендикулярен плоскости параллелограмма $OADB$) и тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ была правой.

Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (в частности, когда один из них нулевой), то параллелограмм $OADB$ вырождается в отрезок, площадь его равна нулю. В этом случае векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считается нуль-вектор: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Итак, подведем итог.

Определение

Векторным произведением упорядоченной пары неколлинеарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который определяется следующими тремя условиями:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi=\angle\,\vec{a}\,\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение полагается равным нуль-вектору.

Векторное умножение применяется в физике для описания момента силы относительно точки O (рис. 208), вращательного движения твердого тела и других механических явлений.

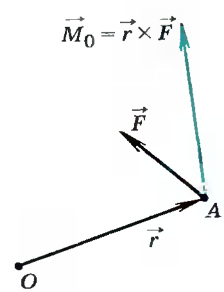


Рис. 208

36.2. Свойства векторного умножения

Из трех основных алгебраических свойств векторное и скалярное умножения различаются лишь в первом: в то время как скалярное умножение коммутативно, т. е. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$, векторное умножение *антикоммутативно*, т. е. выполняется

Свойство 1

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b}). \qquad (36.1)$$

Два других основных алгебраических свойства у них одинаковые.

Свойство 2 *(однородность)*

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого числа x

$$(x\vec{a})\times\vec{b}=x(\vec{a}\times\vec{b}). \qquad (36.2)$$

Свойство 3 *(дистрибутивность)*

Для любых трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}. \qquad (36.3)$$

Доказательства первых двух свойств вытекают непосредственно из определения векторного умножения. Проведем их. Очевидно, что для коллинеарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ равенства (36.1) и (36.2) выполняются. Поэтому считаем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, и считаем, что они отложены от одной точки O и лежат в плоскости α (рис. 209).

Доказательство свойства 1. Чтобы доказать равенство двух векторов, надо доказать, что их модули равны и что они сонаправлены.

Имеем:

$$|\vec{b}\times\vec{a}|=|\vec{b}||\vec{a}|\sin\varphi, \text{ где } \varphi=\angle\,\vec{a}\,\vec{b}.$$

Далее,

$$|-(\vec{a}\times\vec{b})|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi.$$

Итак,

$$|\vec{b}\times\vec{a}|=|-(\vec{a}\times\vec{b})|.$$

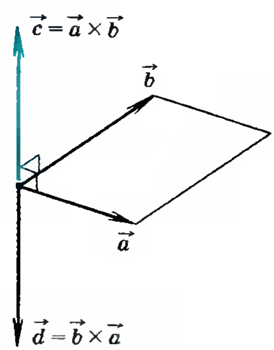


Рис. 209

Проверим, что векторы $\vec{b}\times\vec{a}$ и $-(\vec{a}\times\vec{b})$ сонаправлены. Это равносильно тому, что векторы $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{d}=\vec{b}\times\vec{a}$ направлены противоположно. Но это действительно так: во-первых, они коллинеарны, так как оба они перпендикулярны одной и той же плоскости α, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 209). А во-вторых, их направления различны. Действительно, тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, и потому тройка $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ левая. Следовательно, ориентации правой тройки $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{d}$ и левой тройки $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ различны, т. е. векторы $\vec{d}$ и $\vec{c}$ имеют различные направления.

Итак, $\vec{c}\downarrow\uparrow\vec{d}$, т. е. $-(\vec{a}\times\vec{b})\uparrow\uparrow(\vec{b}\times\vec{a})$. Равенство (36.1) доказано. ■

Доказательство свойства 2. Считаем, что $\alpha\neq0$, так как при $\alpha=0$ равенство (36.2) очевидно. Пусть $\alpha>0$. Тогда $\alpha\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, и потому $\varphi=\angle\vec{a}\vec{b}=\angle(\alpha\vec{a})\vec{b}$. Следовательно,

$$|(\alpha\vec{a})\times\vec{b}|=|\alpha\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi=|\alpha|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi=$$
$$=|\alpha|(|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi)=|\alpha|\,|\vec{a}\times\vec{b}|=|\alpha(\vec{a}\times\vec{b})|.$$

Далее, очевидно, вектор $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}$ и вектор $\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$ сонаправлены с вектором $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. Поэтому (36.2) справедливо при $\alpha>0$. Пусть $\alpha<0$. Тогда $\alpha\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{a}$. Следовательно, $\angle(\alpha\vec{a})\vec{b}=\pi-\varphi$.

Поэтому

$$|(\alpha\vec{a})\times\vec{b}|=|\alpha\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\pi-\varphi)=|\alpha|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi=$$
$$=|\alpha|(|\vec{a}\times\vec{b}|)=|\alpha(\vec{a}\times\vec{b})|.$$

Итак, установлено равенство модулей векторов $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}$ и $\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$ при $\alpha<0$. Их сонаправленность следует из того, что каждый из них, очевидно, направлен противоположно вектору $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ (рис. 210). Следовательно, равенство (36.2) доказано и при $\alpha<0$.

Из равенств (36.1) и (36.2) вытекает аналогичное равенству (36.2) соотношение

$$\vec{a}\times(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\times\vec{b}). \qquad (36.4)$$

Действительно,

$$\vec{a}\times(\alpha\vec{b})=-((\alpha\vec{b})\times\vec{a})=-(\alpha(\vec{b}\times\vec{a}))=\alpha(\vec{a}\times\vec{b}).$$

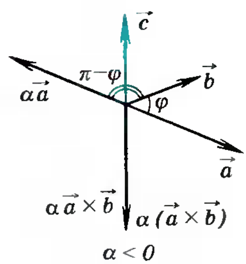


Рис. 210

36.3. Доказательство дистрибутивности векторного умножения

Доказательство равенства (36.3) значительно сложнее и распадается на три этапа.

1-й этап. *Векторное умножение векторов некоторой плоскости α на единичный вектор $\vec{e}$, перпендикулярный этой плоскости, осуществляет их поворот в этой плоскости на угол 90° по часовой стрелке (если смотреть с той стороны, куда направлен вектор $\vec{e}$).*

Доказательство. Пусть вектор $\vec{u}$ лежит в плоскости α, а вектор $\vec{v}=\vec{u}\times\vec{e}$ (рис. 211).

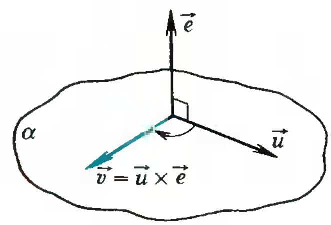


Рис. 211

Так как $\vec{u}\perp\vec{e}$ и $|\vec{e}|=1$, то $|\vec{v}|=|\vec{u}|\,|\vec{e}|\sin 90°=|\vec{u}|$.

Итак, вектор $\vec{v}$ по модулю равен вектору $\vec{u}$. Кроме того, вектор $\vec{v}$ перпендикулярен вектору $\vec{e}$ (а значит, $\vec{v}$ лежит в плоскости α) и вектору $\vec{u}$ (а значит, $\vec{v}$ получается из $\vec{u}$ поворотом в плоскости α на угол 90°). То, что поворот идет по часовой стрелке, следует из того, что тройка векторов $\vec{u}$, $\vec{e}$, $\vec{v}$ правая. ■

2-й этап. Пусть $\vec{e}$ — единичный вектор и $\vec{u}$ — любой вектор. Спроектируем вектор $\vec{u}$ и вектор $\vec{u}_1$ на плоскость α, перпендикулярную вектору $\vec{e}$ (рис. 212). Тогда $\vec{u}\times\vec{e}=\vec{u}_1\times\vec{e}$.

Это утверждение непосредственно вытекает из определения векторного умножения векторов. Проверьте его самостоятельно.

3-й этап. Докажем теперь равенство (36.3). При доказательстве рассматриваем общий случай, когда все участвующие векторы не коллинеарны. Частные случаи рассмотрите самостоятельно.

Сначала считаем вектор $\vec{c}$ единичным. Тогда вектор $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}$ можно получить так. Сложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу параллелограмма и получим некоторый вектор $\vec{d}$ (рис. 213). Спроектируем вектор $\vec{d}$ на плоскость α, перпендикулярную вектору $\vec{c}$, в вектор $\vec{d}_1$ (рис. 213, *а*). Сразу же заметим, что вектор $\vec{d}_1$ будет диагональю параллелограмма *P*, сторонами которого являются векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{b}_1$, полученные из векторов $\vec{a}$

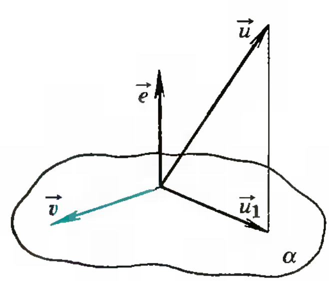


Рис. 212

и $\vec{b}$ проектированием на плоскость α (параллелограмм может вырождаться в отрезок). Поэтому $\vec{d}_1=\vec{a}_1+\vec{b}_1$.

И наконец, повернем вектор $\vec{d}_1$ в плоскости α на $90°$ в вектор $\vec{f}$ (рис. 213, *б*).

Итак, $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{f}$.

Но тот же самый вектор $\vec{f}$ мы получим и строя вектор $\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Действительно, $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}_1\times\vec{c}$, $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}_1\times\vec{c}$. Векторы же $\vec{a}_1\times\vec{c}$ и $\vec{b}_1\times\vec{c}$ получаются поворотом в плоскости α на $90°$ из векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{b}_1$, т. е. они будут сторонами $\vec{g}=\vec{a}_1\times\vec{c}$ и $\vec{h}=\vec{b}_1\times\vec{c}$ параллелограмма Q, полученного из параллелограмма P поворотом на $90°$ в плоскости α. Так как $\vec{f}$ — диагональ этого параллелограмма, то $\vec{f}=\vec{g}+\vec{h}$, т. е. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=$ $=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ для единичного вектора $\vec{c}$.

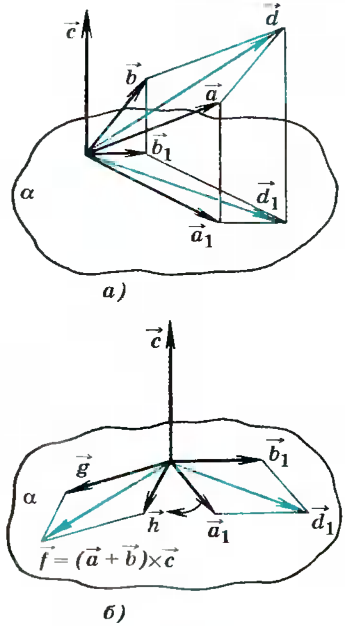


Рис. 213

Произвольный вектор $\vec{c}$ представим так: $\vec{c}=|\vec{c}|\,\vec{e}$, где $\vec{e}$ — единичный вектор. Тогда как доказано,

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{e}=\vec{a}\times\vec{e}+\vec{b}\times\vec{e}. \tag{36.5}$$

Домножая обе части равенства (36.5) на $|\vec{c}|$, получаем:

$$|\vec{c}|((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{e})=(\vec{a}+\vec{b})\times|\vec{c}|\,\vec{e}=(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}$$

и

$$|\vec{c}|(\vec{a}\times\vec{e}+\vec{b}\times\vec{e})=|\vec{c}|(\vec{a}\times\vec{e})+|\vec{c}|(\vec{b}\times\vec{e})=$$
$$=\vec{a}\times(|\vec{c}|\,\vec{e})+\vec{b}\times(|\vec{c}|\,\vec{e})=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$$

Итак, равенство (36.3) доказано для общего случая. ■

Замечание. Векторное умножение не обладает ассоциативностью, т. е. векторы $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ и $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ не равны. Приведите соответствующие примеры.

36.4. Вычислительная формула для векторного умножения

Доказанные свойства векторного умножения позволяют теперь легко вывести формулу, выражающую векторное произведение векторов через координаты сомножителей.

Пусть в пространстве выбран ортонормированный базис с базисными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, образующими правую тройку. Отметим прежде всего, что

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{i}=$$
$$=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \qquad (36.6)$$

и

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}. \qquad (36.7)$$

Если теперь взять два вектора $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ и $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то, пользуясь равенствами (36.1) — (36.4) и (36.6), (36.7), получаем:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=$$
$$=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}.$$

Задачи

Находим величину

36.1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб со стороной 1. Нарисуйте:

а) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{C_1C}\times\overrightarrow{C_1D_1}$; в) $\overrightarrow{CB_1}\times\overrightarrow{BC_1}$; г) $\overrightarrow{A_1C_1}\times\overrightarrow{BD}$; д) $\overrightarrow{AC_1}\times\overrightarrow{DD_1}$;

е) $\overrightarrow{AC_1}\times\overrightarrow{DB_1}$; ж) $\overrightarrow{AD_1}\times\overrightarrow{DC_1}$.

Рисуем

36.2. Пусть $|\vec{a}\times\vec{b}|=1$. Чему равно:

а) $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$; б) $\left|\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\times\left(\vec{b}-\dfrac{\vec{a}}{2}\right)\right|$?

36.3. Пусть $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$, $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}$, $\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}$. Найдите $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, $\angle\vec{a}\,\vec{b}$, $\angle\vec{b}\,\vec{c}$, $\angle\vec{c}\,\vec{a}$.

36.4. Вычислите $|\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}|$, если:

а) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — единичные векторы, идущие из центра равностороннего треугольника в его вершины;

б) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ квадрата $ABCD$ со стороной 1, а вектор $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$;

в) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — это векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_5A_6}$ правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ со стороной 1.

Ищем границы

36.5. Пусть $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$. В каких границах лежит $|\vec{a}\times\vec{b}|$?

Доказываем

36.6. Докажите, что $|(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}|\leqslant|\vec{a}\times\vec{c}|+|\vec{b}\times\vec{c}|$. Дайте этому неравенству геометрическое истолкование. Установите, когда достигается равенство.

36.7. Докажите такие равенства:

а) $\alpha\vec{a}\times\beta\vec{b}=(\alpha\beta)\cdot\vec{a}\times\vec{b}$;

б) $(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{c}$;

в) $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\times\vec{c}=\alpha(\vec{a}\times\vec{c})+\beta(\vec{b}\times\vec{c})$;

г) $\vec{c}\times(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})=\alpha(\vec{c}\times\vec{a})+\beta(\vec{c}\times\vec{b})$.

Исследуем

36.8. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичные.

а) Найдите $|\vec{a}\times\vec{b}|$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha$.

б) Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $|\vec{a}\times\vec{b}|=\beta$.

в) Может ли выполняться равенство $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\cdot\vec{b}|$?

Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют произвольную длину. Установите связь между $|\vec{a}\times\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$.

36.9. Пусть даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
Что следует из таких условий:

а) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;

б) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$;

в) существует вектор $\vec{c}$, такой, что $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$;

г) для любого вектора $\vec{c}$ верно равенство $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$;

д) $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$;

е) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$;

ж) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$;

з) $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$?

36.10. Верно ли, что:

а) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times(\vec{b}+\lambda\vec{a})$;

б) $\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{a}+\lambda\vec{b})\times\vec{b}$?

36.11. Выражение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ называется смешанным векторным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Исследуйте его свойства.

36.12. Выражение $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ называется двойным векторным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Исследуйте его свойства.

Рассуждаем

36.13. В чем разница между векторным и скалярным умножением векторов? В чем их сходство?

36.14. Какой вектор является базисом для прямой: а) перпендикулярной плоскости, базисом на которой являются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) перпендикулярной двум скрещивающимся прямым, базисами на которых являются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

§ 37. Координаты

37.1. Прямоугольные координаты

Координатами называют числа, определяющие положение точки. Вы знакомы с прямоугольными координатами на плоскости, а также с географическими координатами — широтой и долготой. В пространстве к двум координатам присоединяется третья: например, положение точки на Земле определяется широтой, долготой и высотой над уровнем моря.

В науке пользуются разными координатами, или, как говорят, **системами координат**. Рассмотрим самые употребительные и простые координаты в пространстве, называемые **прямоугольными.** Их называют еще декартовыми по имени Рене Декарта (1596—1650) — французского ученого и философа, впервые введшего координаты в геометрию (на плоскости). Заметим, что географические координаты употреблялись раньше.

Возьмем какую-либо плоскость α и введем на ней прямоугольные координаты x, y. Любой точке M в пространстве отнесем три координаты — две координаты x, y ее проекции N на плоскость α, а третью координату z, которую определим так: $|z|$ равен расстоянию от M до плоскости α, причем $z>0$ с одной какой-нибудь стороны от плоскости α и $z<0$ с другой стороны, а на самой плоскости $z=0$ (рис. 214). Если плоскость α представлять как горизонтальную, то считают $z>0$ над ней, а $z<0$ под ней. Заметим, что так как расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра из этой точки на данную плоскость, то $|z|=|MN|$.

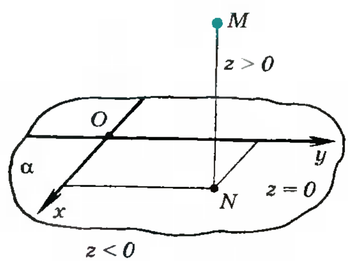


Рис. 214

Итак, *каждой точке пространства однозначно отнесены три координаты* x, y, z; *координата* x *считается первой,* y *— второй,* z *— третьей.*

Обратно: *если заданы любые три числа в определенном порядке* x_0, y_0, z_0, *то найдется, и притом единственная, точка* M *с координатами* $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$.

Действительно, возьмем на плоскости α точку N с координатами $x=x_0$, $y=y_0$. Затем возьмем точку M, проектирующуюся в точку N (т. е. лежащую на прямой, проходящей через N перпендикулярно плоскости α). При этом точку M возьмем на расстоянии от плоскости α, равном $|z_0|$, и с той стороны, которая соответствует знаку z_0. Точка M окажется однозначно определенной.

Таким образом, оказывается, что не только каждой точке соответствуют определенные значения координат, но и обратно: каждым трем числам, взятым в определенном порядке, соответствует точка с такими значениями координат. Точку M с данными координатами x_0, y_0, z_0 обозначают $M(x_0, y_0, z_0)$, например $M(-3, 2, 7)$, или просто $(-3, 2, 7)$.

В изложенном определении прямоугольных координат координата z пока занимает особое положение. Однако можно определить те же координаты так, чтобы все три координаты играли одинаковую роль.

Выберем в пространстве какую-нибудь точку O и проведем через нее три взаимно перпендикулярные прямые. Перенумеруем их в каком-нибудь порядке и введем на каждой из них координату с началом (нулем) в точке O (рис. 215). Эти координаты назовем: на первой прямой x, на второй — y, на третьей — z. Соответственно считаются и номера координат: x — первая, y — вторая, z — третья.

Проведенные прямые называются осями координат: «ось x», «ось y», «ось z». Плоскостью xy называется плоскость, проходящая через оси x и y. (Вначале плоскость xy называлась плоскостью α и с ее выбора начиналось введение координат в пространство.) Аналогично определяются плоскости xz и yz.

Определим координаты любой точки M следующим образом. Спроектируем точку M на оси x, y, z в точки M_x, M_y, M_z соответственно (рис. 216). Их координаты на осях сопоставляются точке M как ее координаты x, y, z. Таким образом, координатами точки в пространстве называются координаты ее проекций на оси координат. Убедитесь, что это те же самые прямоугольные координаты.


Рене Декарт

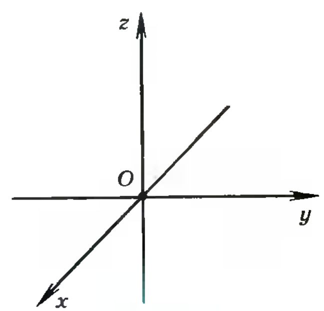


Рис. 215

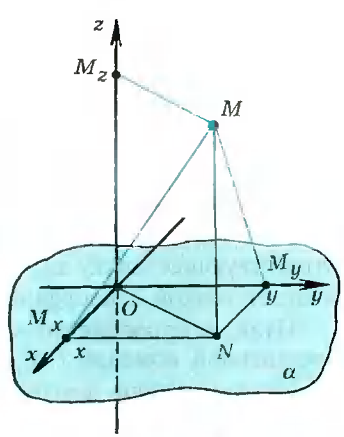


Рис. 216

Принято изображать координатные оси так, как на рисунке 215. Такой способ изображения соответствует тому, что ось z представляется вертикальной, а плоскость xy — горизонтальной. Ось x представляется направленной на нас.

Векторы, идущие в направлении этих координатных осей, образуют правую тройку. Поэтому изображенная на рисунке 216 система координат называется **правой**. Если представить себе винт, ввинчивающийся в направлении стрелки на оси z, то головка винта должна вращаться от положительной полуоси x к положительной полуоси y. Если изменить направление оси x на противоположное, то получится другая система координат, которая называется **левой**. Ей соответствует не обычный, а левый винт (чтобы такой винт шел в направлении оси z, его надо поворачивать от положительной полуоси y к положительной полуоси x). В геометрии совершенно безразлично: выбирать правую или левую ось координат.

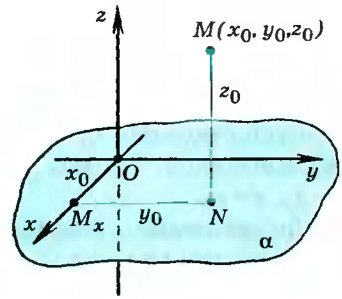


Рис. 217

Мы уже указали два (равносильных) способа нахождения координат точки, если задана система координат. Перед тем как решить обратную задачу — построить точку по данным координатам, укажем еще один способ нахождения координат точки.

Из данной точки M опускаем перпендикуляр MN на плоскость xy (рис. 217). Его длина с соответствующим знаком даст координату z_0. Из основания этого перпендикуляра опускаем перпендикуляр NM_x на ось x: его длина с определенным знаком даст координату y_0, а его основание на оси x определит координату x_0.

Теперь построим точку по данным координатам. Для этого обратимся к последнему способу нахождения координат данной точки. Именно пусть даны значения координат x_0, y_0, z_0. Берем на оси x точку M_x с координатой x_0 (рис. 217). Из этой точки проводим перпендикуляр M_xN к оси x в плоскости xy в полуплоскость, соответствующую знаку y_0, на длину, равную $|y_0|$. Из конца N этого перпендикуляра проводим перпендикуляр NM к плоскости xy на длину $|z_0|$ в полупространство, соответствующее знаку z_0. Конец этого перпендикуляра и будет точкой с координатами x_0, y_0, z_0.

Итак, построение точки M свелось к построению трехзвенной ломаной OM_xNM.

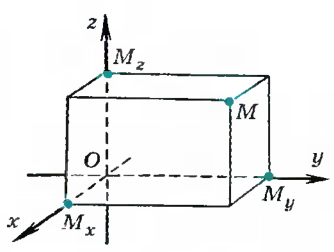


Рис. 218

Укажем теперь другое построение точки по ее координатам. Сначала находим на осях координат точки с данными координатами. Затем через эти точки проводим три плоскости, перпендикулярные осям координат. Искомая точка M является точкой пересечения этих плоскостей (рис. 218).

Действительно, ее проекциями на оси координат являются точки пересечения построенных плоскостей с координатными осями. Поэтому точка M имеет данные координаты.

37.2. Формула расстояния между точками

Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, и пусть A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 — их проекции на оси (рис. 219). По пространственной теореме Пифагора квадрат расстояния между A и B, т. е. квадрат длины отрезка AB, равен сумме квадратов его проекций на любые три взаимно перпендикулярные прямые. Стало быть,

$$AB^2 = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2. \tag{37.1}$$

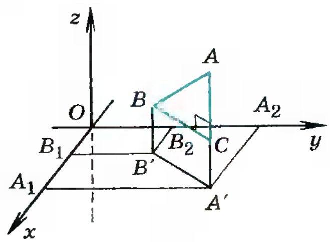


Рис. 219

Расстояние между точками на прямой, где введена координата, равно, как известно из планиметрии, модулю разности координат. Поэтому

$$A_1B_1 = |x_2 - x_1|,\ A_2B_2 = |y_2 - y_1|,\ A_3B_3 = |z_2 - z_1| \tag{37.2}$$

и из формулы (37.1) следует:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{37.3}$$

Это важная формула! Выразите ее словами как теорему.

37.3. Замечание о применении координат

В геометрии, так же как и в теоретических вопросах механики и физики, чаще всего пользуются прямоугольными координатами, определяя координаты точки как координаты ее проекций на оси. В этом случае оси играют одинаковую роль, поскольку все направления в пространстве равноправны.

Однако в тех или иных конкретных условиях направления могут быть вовсе не равноправными. На каждом участке земли, который можно считать плоским, выделяется вертикальное направление. Тогда естественно определять координаты, как сделано в начале п. 37.1. На топографических картах изображаются сравнительно небольшие участки земной поверхности и в качестве третьей координаты фигурирует высота. Аналогично делается на картах, где, например, даются глубины в заливах, гаванях, при изображении геологических разрезов.

Координаты на плоскости служат для графического изображения функций одной переменной — зависимости одной величины от другой. Координаты в пространстве могут служить для графического изображения функций двух переменных — зависимости одной величины от двух других, как, например, давление газа зависит от объема и температуры. Тогда масштабы на осях выбираются произвольно из соображений удобства и наглядности изображения. В математике же, когда функции — числовые, масштабы по осям берутся одинаковыми.

37.4. Координаты и векторы

Задание прямоугольной системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве равносильно заданию начала координат и ортонормированного базиса — единичных направляющих векторов осей координат. Для случая пространства вектор $\vec{i}$ определяет направление оси x, вектор $\vec{j}$ идет по оси y, вектор $\vec{k}$ — по оси z (рис. 220). При этом правой системе координат соответствует правый базис, а левой — левый. Более того, оказывается, что ***координаты любой точки M (x, y, z) в данной системе прямоугольных координат — это координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}=(x,\ y,\ z)$ относительно соответствующего этой системе базиса***, причем это верно и для прямой, и для плоскости, и для пространства.

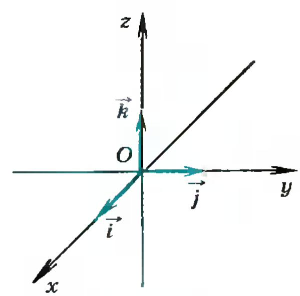


Рис. 220

Для случая прямой это утверждение, очевидно, вытекает из определения координаты на прямой, теоремы 34.1 и определения радиус-вектора.

Рассмотрим случай пространства (для плоскости доказательство аналогично).

Возьмем в пространстве некоторую прямоугольную систему координат с началом в точке O и координатными осями x, y, z (рис. 221). Пусть A, B, C — точки с единичными координатами на этих осях, т. е. $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. Тогда векторы $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{k}=\overrightarrow{OC}$ — это направляющие единичные векторы координатных осей x, y, z.

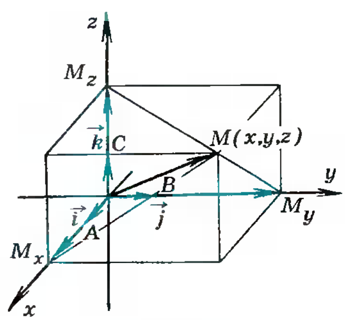


Рис. 221

Возьмем любую точку $M(x, y, z)$, и пусть $\overrightarrow{OM}$ — ее радиус-вектор. Разложим $\overrightarrow{OM}$ по осям координат. Тогда получим, что

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}, \qquad (37.4)$$

где M_x, M_y, M_z — проекции точки M на оси координат. Из определения координат x, y, z точки M следует, что точки M_x, M_y, M_z имеют такие координаты: $M_x(x, 0, 0)$, $M_y(0, y, 0)$, $M_z(0, 0, z)$. С другой стороны, так как для случая прямой уже доказано, что

$$\overrightarrow{OM_x} = x\vec{i}, \ \overrightarrow{OM_y} = y\vec{j}, \ \overrightarrow{OM_z} = z\vec{k}, \qquad (37.5)$$

то, подставляя (37.5) в (37.4), получаем:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (37.6)$$

Итак, доказано, что координаты точки M соответственно равны координатам ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ относительно базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. ■

Теперь, так же как в планиметрии, можно вывести формулу, выражающую скалярное произведение векторов через координаты: *скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.* Это значит, что для векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \text{ и } \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (37.7)$$

Напомним этот вывод. Рассмотрим сначала случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Отложим $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от начала O. Получим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 222). Точка A имеет координаты x_1, y_1, z_1, точка B — координаты x_2, y_2, z_2. В треугольнике OAB угол при вершине O равен углу $\varphi = \angle \vec{a}\vec{b}$. Вычислим сторону AB треугольника OAB по теореме косинуса.

Получим:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\varphi. \qquad (37.8)$$

Но $OA \cdot OB \cos\varphi = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, т. е. $OA \cdot OB \cos\varphi = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

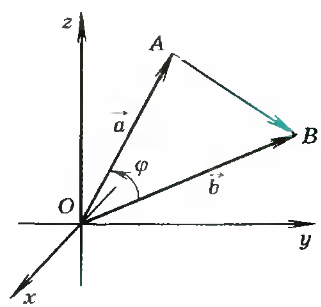


Рис. 222

Используем последнее равенство и получим из (37.8), что

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(OA^2+OB^2-AB^2\right). \qquad (37.9)$$

По формуле расстояния между двумя точками (37.1)

$$OA^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\ OB^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,$$
$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2. \qquad (37.10)$$

Подставляя эти выражения в (37.9) и упрощая, получаем (37.7).

Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то один из них получается из другого умножением на число. Пусть, например, $\vec{b}=k\vec{a}$. Тогда $x_2=kx_1$, $y_2=ky_1$, $z_2=kz_1$. Дальнейшие рассуждения проведите самостоятельно. ■

Из равенства (37.7) вытекают все свойства скалярного умножения, в частности его дистрибутивность: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$. Проведите самостоятельно соответствующие рассуждения.

Отметим еще, что если известны координаты начала $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и конца $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$, то *координаты этого вектора равны разности соответствующих координат его конца и начала.*

Действительно,

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})=$$
$$=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}. \qquad (37.11)$$

37.5. Задание фигур уравнениями и неравенствами

1. Задание фигур в пространстве. Понятие об уравнении фигуры (множества точек) в пространстве вводится дословно так же, как на плоскости. А именно пусть в пространстве фигура F задается некоторым характерным свойством. Это свойство определяет, какие точки принадлежат фигуре F, а какие не принадлежат. Введем в пространстве прямоугольные координаты x, y, z. Тогда каждая точка фигуры F задается своими координатами и характерное свойство можно выразить в виде аналитического соотношения (уравнения или неравенства), которому должны удовлетворять координаты точек фигуры F.

Например, пусть F — сфера с центром $A(a, b, c)$ и радиусом r. Эта сфера есть множество точек M пространства, расстояние от которых до точки A равно r, т. е.

$$AM=r. \qquad (37.12)$$

Равенство (37.12) выражает характерное свойство сферы.

Пусть x, y, z — координаты точки M. Согласно формуле (37.1) п. 37.2 равенство (37.12) равносильно равенству

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r, \qquad (37.13)$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \qquad (37.14)$$

Это и есть уравнение сферы F с центром в точке $A(a, b, c)$ и радиусом r, т. е. множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (37.14), представляют собой сферу.

Итак, точка $M(x, y, z) \in F$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (37.14).

В общем же случае говорят, что *фигура F задается данным уравнением в прямоугольных координатах, если точка принадлежит фигуре F тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют данному уравнению.* Это означает, что выполняются два условия: 1) *если точка принадлежит фигуре F, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению*; 2) *если числа x, y, z удовлетворяют данному уравнению, то точка с такими координатами принадлежит фигуре F.* Второе условие можно выразить иначе: *координаты любой точки, не принадлежащей фигуре F, не удовлетворяют данному уравнению.*

Например, плоскость, перпендикулярная оси z и проходящая через точку $C(0, 0, c)$ на оси z, задается уравнением $z=c$ (рис. 223). Действительно, каждая точка, лежащая на этой плоскости, имеет одну и ту же координату $z=c$. А любая точка, не лежащая на этой плоскости, имеет другое значение координаты z, отличное от c.

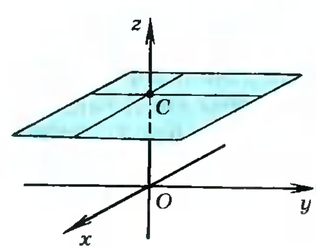


Рис. 223

Фигуры в пространстве могут задаваться не только уравнениями, но и неравенствами. Говорят, что фигура задается данным неравенством в прямоугольных координатах, если точка принадлежит фигуре тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют данному неравенству.

Например, рассмотрим шар с центром $A(a, b, c)$ и радиусом r. По определению это множество точек M пространства, для которых

$$AM \leqslant r, \tag{37.15}$$

т. е. $AM^2 \leqslant r^2$. Выражая расстояние AM через координаты точек $A(a, b, c)$ и $M(x, y, z)$, получим:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant r^2. \tag{37.16}$$

Это неравенство задает шар с центром $A(a, b, c)$ и радиусом r: координаты каждой точки шара удовлетворяют этому неравенству и, наоборот, каждая точка, координаты которой удовлетворяют неравенству (37.16), удовлетворяет неравенству (37.15), т. е. принадлежит рассматриваемому шару.

Замечание. Сравните уравнение и неравенство, задающие сферу и шар в пространстве, с уравнением и неравенством, задающими окружность и круг на плоскости.

2. Задание пересечения фигур. Если две фигуры F_1 и F_2 задаются некоторыми уравнениями (или неравенствами), то пересечение фигур $F_1 \cap F_2$ является множеством точек, координаты которых удовлетворяют обоим уравнениям (или неравенствам). Например, система

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-r^2=0, \\ z=c \end{cases} \tag{37.17}$$

задает сечение сферы плоскостью, если $|z| \leqslant c$ (а что, если $|z|>c$?).

Другой пример: если плоскости α и β задаются соответственно уравнениями $x=a$ и $y=b$, то прямая $l=\alpha \cap \beta$ задается в пространстве системой уравнений (рис. 224)

$$\begin{cases} x=a, \\ y=b. \end{cases} \tag{37.18}$$

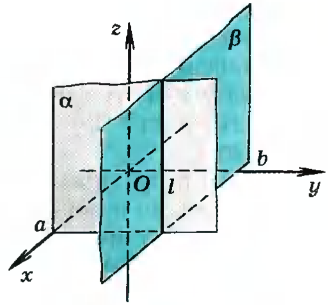


Рис. 224

3. Уравнения без одной или двух координат. Левая часть уравнения фигуры на плоскости $\Phi(x, y)=0$ или в пространстве $\Phi(x, y, z)=0$ может не содержать все координаты явно, как, например, самое простое уравнение $x=0$. Какую фигуру оно задает? На плоскости (в прямоугольных координатах) — прямую (ось y), а в пространстве — плоскость yz.

Из этого простого примера ясно, что само по себе уравнение никакой фигуры не задает. Только если все три координаты входят в уравнение явно, то оно определенно относится к пространству. Иначе нужно оговорить, относится ли уравнение к пространству или к плоскости.

Если уравнение вида $\Phi(x, y)=0$ на координатной плоскости xy задает фигуру F, то в пространстве фигура G, заданная этим же уравнением, является бесконечным цилиндром, прямолинейные образующие которого проходят через все точки фигуры F и перпендикулярны плоскости xy.

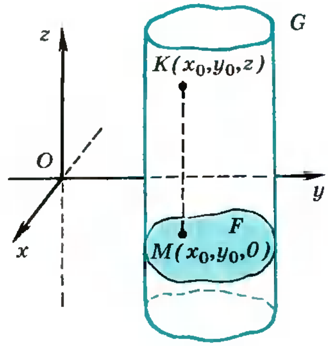


Рис. 225

Действительно, точка K с фиксированными координатами x_0, y_0 и переменной координатой z является точкой фигуры G тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\Phi(x_0, y_0)=0$ (рис. 225). А это имеет место тогда и только тогда, когда точка $M(x_0, y_0, 0)$ — проекция любой точки $K(x_0, y_0, z)$ на плоскость xy — принадлежит фигуре F. Следовательно, прямая, проходящая через точку $M(x_0, y_0, 0)$ перпендикулярно плоскости xy, принадлежит фигуре G, если $M \in F$, т. е. фигура G состоит из таких прямых и является цилиндром.

37.6. Уравнение плоскости

Как вы знаете, в системе прямоугольных координат x, y на плоскости каждая прямая задается уравнением вида

$$Ax+By+C=0, \qquad (37.19)$$

причем коэффициенты A и B не обращаются в нуль одновременно, т. е. $A^2+B^2>0$, а также верно и обратное утверждение: каждое уравнение вида (37.19) при условии, что $A^2+B^2>0$, задает на плоскости в системе прямоугольных координат x, y прямую.

Для плоскости в пространстве верен аналогичный результат.

Теорема 37.1

Плоскость в пространстве задается в системе прямоугольных координат x, y, z уравнением вида

$$\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0} \qquad (37.20)$$

при условии, что

$$\boldsymbol{A^2+B^2+C^2>0}, \qquad (37.21)$$

т. е. коэффициенты A, B, C не обращаются в нуль одновременно.

Верно также и обратное утверждение: ***уравнение вида (37.20) при условии (37.21) задает в пространстве плоскость в системе прямоугольных координат.***

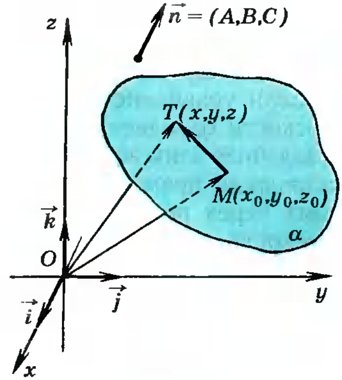


Рис. 226

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть в пространстве введены прямоугольные координаты x, y, z и задана некоторая плоскость α. Возьмем любой ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости α. Назовем его вектором нормали к плоскости α (рис. 226) и обозначим его координаты A, B, C, т. е.

$$\vec{n}=(A, B, C). \tag{37.22}$$

Положение плоскости α в пространстве вполне определится, если, кроме вектора нормали $\vec{n}$, задать какую-нибудь точку $M(x_0, y_0, z_0)\in\alpha$. Точка $T(x, y, z)$ принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{MT}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{MT}=0. \tag{37.23}$$

Равенство (37.23) и является уравнением плоскости α. Так как

$$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OM}, \text{ то } \overrightarrow{MT}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0). \tag{37.24}$$

Теперь из равенств (37.22), (37.23) и (37.24), пользуясь формулой (37.7) для скалярного умножения, получаем уравнение плоскости α в координатах:

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0. \tag{37.25}$$

Если ввести обозначение $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, то приходим к уравнению (37.20), а так как вектор $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ ненулевой, то выполняется условие (37.21). Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть дано уравнение (37.20) и выполняется условие (37.21). Можно считать тогда, что, например $A\neq0$. Возьмем ненулевой вектор $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ и точку $M\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$. В пространстве существует единственная плоскость α, проходящая через точку $M\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$ перпендикулярно вектору

$\vec{n}$. Как было доказано, эта плоскость задается уравнением

$$Ax+By+Cz-\left(-A\cdot\frac{D}{A}\right)=0,$$

т. е. уравнением (37.20). И второе утверждение теоремы доказано. ■

Замечание. Рассмотрим случай, когда уравнение (37.20) плоскости α содержит не все координаты, например имеет вид $Ax+By+D=0$, т. е. $C=0$. Если такому уравнению удовлетворяют координаты x_0, y_0 некоторой точки M плоскости xy, то ему удовлетворяют и координаты любой точки прямой l, проходящей через M и перпендикулярной плоскости xy. Поэтому в рассматриваемом случае плоскость α содержит эту прямую, т. е. α параллельна оси z, если $D\neq 0$, и проходит через ось z, если $D=0$. Рассмотрите самостоятельно случаи обращения в нуль других коэффициентов в уравнении (37.20).

37.7. Метод координат

Суть метода координат состоит в следующем. Во-первых, задавая фигуры уравнениями (неравенствами) и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы применяем алгебру и анализ к решению геометрических задач, к доказательству геометрических теорем.

Мы как раз начали с того, что, введя прямоугольные координаты, выразили через них основное геометрическое понятие — расстояние между точками. Это был первый шаг в применении метода координат.

Применение координат и алгебраических методов к исследованию геометрических объектов и к решению геометрических задач составляет раздел геометрии, называемый **аналитической геометрией**.

Во-вторых, пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и так применять геометрию к алгебре и анализу. Графическое изображение функций — первый пример такого применения метода координат.

Через метод координат геометрия и алгебра с анализом, соединяясь и взаимодействуя, дают богатые плоды, которые они не могли бы дать, оставаясь разделенными. Их взаимное влияние составляет одну из главных внутренних пружин развития математики от Декарта и Ньютона до наших дней.

37.8*. Другие системы координат

Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом разных способов. И, решая ту или иную геометрическую и физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще, удобнее. Рассмотрим некоторые координатные системы, отличные от прямоугольных.

1. Косоугольные (аффинные) координаты. На плоскости они определяются так.

Проведем на плоскости через данную точку O две произвольные прямые и введем на каждой из них координату, отсчитанную от точки O (масштабные отрезки на осях могут быть различной длины, рис. 227). Обозначим эти координаты x, y и прямые назовем осями x, y, т. е. так же как в случае прямоугольных координат, но только оси теперь не предполагаются взаимно перпендикулярными.

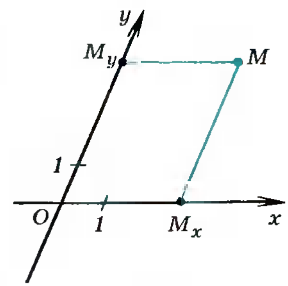


Рис. 227

Любой точке M плоскости сопоставляем на оси x точку M_x, в которой эту ось пересекает прямая, параллельная оси y. Аналогично определяем точку M_y на оси y. **Косоугольными координатами** x, y точки M называются координаты точек M_x и M_y на осях x и y.

В пространстве косоугольные координаты вводятся так. Проведем через данную точку O три произвольные прямые, не лежащие в одной плоскости, и введем на каждой из них координату, отсчитываемую от точки O. Обозначим эти координаты через x, y, z, а прямые назовем осями x, y, z.

Любой точке M пространства соответствует на оси x точка M_x, в которой эту ось пересекает плоскость, проходящая через M параллельно плоскости yz, а если M лежит в плоскости yz, то полагаем $x=0$. Аналогично определяем на осях y и z точки M_y и M_z. За координаты x, y, z точки M принимаются координаты точек M_x, M_y, M_z на соответствующих осях (рис. 228). Если оси взаимно перпендикулярны, то косоугольные координаты становятся прямоугольными.

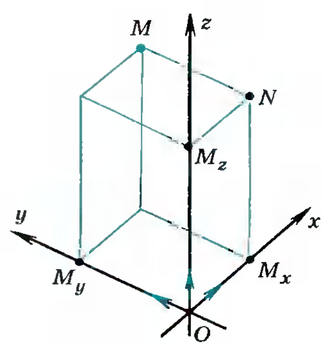


Рис. 228

Задание системы косоугольных координат равносильно заданию начала координат и базиса, состоящего из базисных направляющих векторов координатных осей (они могут быть и различной длины).

При этом и ***в косоугольной системе координат для любой точки ее кординаты соответственно равны координатам радиус-вектора этой точки относительно базиса, состоящего из единичных***

направляющих векторов данных координатных осей.

Проверьте, что доказательство этого утверждения, проведенное выше для прямоугольной системы координат, останется справедливым и для общего (косоугольного) случая.

2. Полярные координаты. Возьмем на плоскости точку O. Проведем из нее луч a и отметим направление отсчета углов от этого луча (рис. 229). Каждой точке M плоскости (отличной от O) сопоставим в качестве ее координат r, φ, расстояние $r=|OM|$ и угол φ, образованный лучом OM с лучом a (как всегда, угол определяется с точностью до 360°, т. е. до 2π). Для точки O расстояние $r=|OO|=0$, а угол φ не определен.

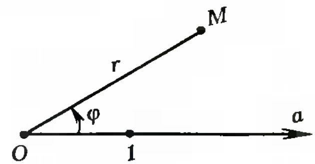


Рис. 229

Такие координаты называются **полярными**, точка O называется их **полюсом**. Этими координатами особенно удобно пользоваться, когда рассматривают движение тела вокруг какого-либо центра, как, например, движение планет вокруг Солнца. В алгебре их используют для тригонометрической формы комплексного числа.

3. Цилиндрические координаты. В пространстве возьмем какую-нибудь плоскость α и введем на ней полярные координаты r, φ с центром в какой-либо точке O. Через эту точку проведем прямую $a \perp \alpha$, на ней введем координату z с нулем в точке O. Каждой точке пространства сопоставляются в качестве ее координат полярные координаты r, φ ее проекции на плоскость и координата z ее проекции на прямую a (рис. 230).

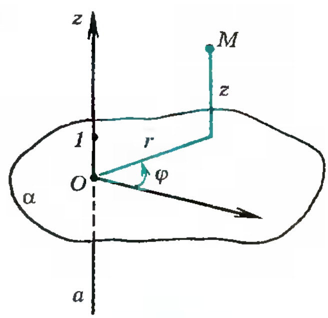


Рис. 230

Координаты эти называются **цилиндрическими**, так как поверхности $r=\text{const}$ представляют собой бесконечные цилиндры. Направление обхода на плоскости α и направление на оси z могут образовывать либо правый, либо левый винт. В цилиндрических координатах удобно задавать поверхности вращения.

4. Сферические координаты. На Земле вводят известные **географические координаты** — широту φ и долготу λ. Положение любой точки M относительно Земли можно определить тремя координатами: расстоянием $r=|OM|$ от центра Земли O и **широтой** и **долготой** того места на Земле, где луч OM «протыкает» поверхность Земли (рис. 231).

В геометрии так называемые **сферические координаты** определяют сходно, но немного иначе.

Возьмем в пространстве какую-нибудь точку O и опишем вокруг нее какую-либо сферу S. На ней отметим какую-нибудь точку N — «Северный полюс». Большая окружность, лежащая в плоскости, которая проходит

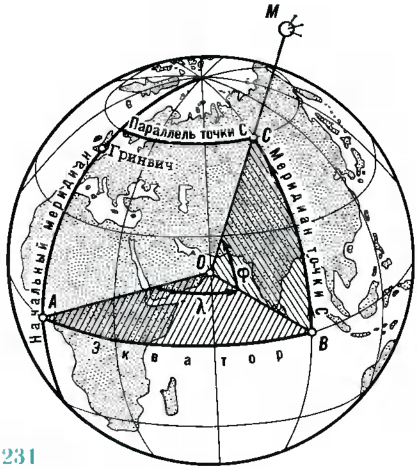


Рис. 231

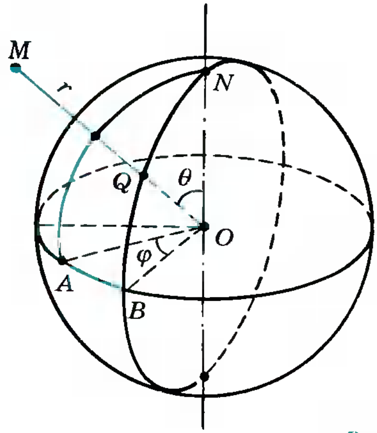


Рис. 232

через центр O перпендикулярно (ON), будет «экватором». На ней отметим какую-нибудь точку A и направление обхода.

На сфере S вводятся две координаты: **полярное расстояние** ϑ и **долгота** φ. Полярное расстояние точки $Q \in S$ — это угол между лучами ON и OQ (рис. 232). Если точка Q отлична от полюса N и диаметрально противоположной ему точки, то для определения долготы проведем через луч OQ полуплоскость, ограниченную прямой ON. Проведенная полуплоскость пересечет экватор в некоторой точке B. Угол между лучами OA и OB, отсчитанный в указанном на экваторе направлении, и будет долготой точки Q.

Точке M пространства сопоставляются три координаты: расстояние $r = |OM|$ от точки O, полярное расстояние ϑ и долгота φ той точки Q на сфере S, где ее пересекает луч OM. Для точек прямой ON долгота не определена.

▲ 37.9. Координатная сеть

Определяя координатами положение точки на плоскости (или на другой поверхности, например на сфере), мы во всех рассмотренных случаях задавали пару чисел — координат точек. Но такое задание точки равносильно ее заданию как точки пересечения двух линий — так называемых **координатных линий.** Примерами таких координатных линий являются параллели и меридианы на земной поверхности. Точка, имеющая, скажем, координатами 29° восточной долготы и 60° северной широты, лежит на пересечении соответствующих меридиана и параллели. Вся поверхность Земли оказывается покрытой двумя семействами таких линий — параллелей и меридианов. Они образуют сеть, называемую **координатной сетью** (рис. 233). Любая точка поверхности Земли (за исключением полюсов) является пересечением одного меридиана и одной параллели, а друг с другом две параллели (или два меридиана) не пересекаются. Задание одной координатной линии положение точек не определяет (вспомните роман Ж. Верна «Дети капитана Гранта», где путешественники, разыскивающие капитана Гранта, знали лишь, что он находится в точке, имеющей одной из координат 37° южной широты). Другой пример: назначая место встречи, вы часто говорите: «Встретимся на углу таких-то улиц». Здесь сеть улиц в городе тоже является примером координатной сети.

Рис. 233

Если в прямоугольной системе координат на плоскости точка M имеет координаты a и b, то она является пересечением прямых, заданных уравнениями $x=a$ и $y=b$. Для прямоугольной системы координат сеть координатных линий состоит из прямых, перпендикулярных осям x и y. Их уравнения имеют соответственно вид $x=a$ и $y=b$ (рис. 234).

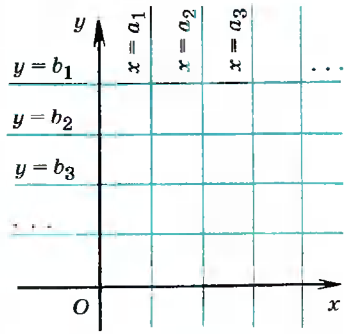


Рис. 234

Для полярной системы координат координатная сеть состоит из лучей, исходящих из полюса, и концентрических окружностей с центром в полюсе (рис. 235).

Для координатных систем в пространстве координатные сети состоят из трех семейств поверхностей, на каждой из которых постоянна одна из трех координат. Для прямоугольной и цилиндрической систем координат координатные сети изображены на рисунках 236 и 237. Объясните, семейства каких поверхностей образуют эти сети и как расположены относительно друг друга эти поверхности.▼

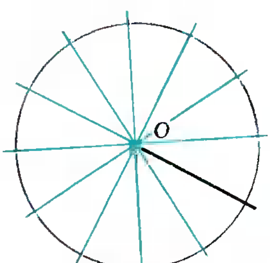


Рис. 235

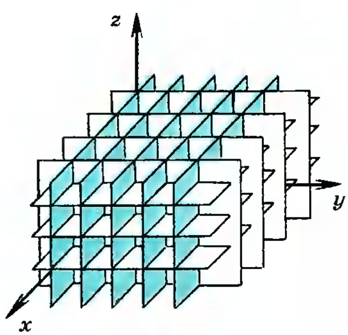


Рис. 236

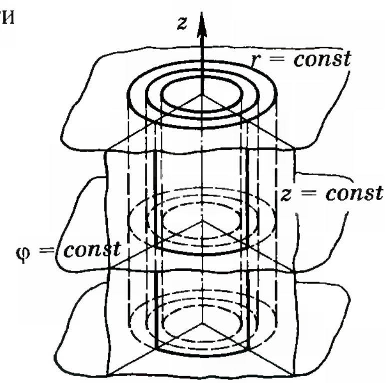


Рис. 237

Дополнение к параграфу 37

I. Параметрические уравнения прямой и плоскости

Равенство координат точек и координат радиус-векторов в любой косоугольной системе координат (см. п. 37.4) позволяет векторные уравнения прямой и плоскости, полученные в п. 35.4, записать через координаты.

Пусть прямая a в пространстве задана уравнением

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{m}, \tag{1}$$

а плоскость α — уравнением

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{m}+s\vec{n} \tag{2}$$

(см. п. 35.4). Введем в пространстве координаты x, y, z (не обязательно прямоугольные) с началом в точке O и базисными координатными векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Выразим через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторы $\vec{r}$, $\vec{r}_0$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, входящие в уравнения (1) и (2):

$$\begin{aligned}
\vec{r}&=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3,\\
\vec{r}_0&=x_0\vec{e}_1+y_0\vec{e}_2+z_0\vec{e}_3,\\
\vec{m}&=m_1\vec{e}_1+m_2\vec{e}_2+m_3\vec{e}_3,\\
\vec{n}&=n_1\vec{e}_1+n_2\vec{e}_2+n_3\vec{e}_3.
\end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя равенства (3) в (1) и (2), получаем равенства

$$x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3= \\ =(x_0+tm_1)\,\vec{e}_1+(y_0+tm_2)\,\vec{e}_2+(z_0+tm_3)\,\vec{e}_3 \tag{4}$$

и

$$x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3= \\ =(x_0+tm_1+sn_1)\,\vec{e}_1+(y_0+tm_2+sn_2)\vec{e}_2+(z_0+tm_3+sn_3)\vec{e}_3. \tag{5}$$

Так как равенство векторов равносильно равенству их координат, то векторные равенства (4) и (5) равносильны тройкам числовых равенств, задающих соответственно прямую a и плоскость α:

$$x=x_0+tm_1,\ y=y_0+tm_2,\ z=z_0+tm_3; \tag{6}$$

$$x=x_0+tm_1+sn_1,\ y=y_0+tm_2+sn_2,\ z=z_0+tm_3+sn_3. \tag{7}$$

Системы (6) и (7) называются соответственно параметрическими уравнениями прямой и плоскости, а переменные t и s в этих уравнениях — параметрами.

II. Уравнения прямой и плоскости в аффинных координатах

Исключая из уравнений (7) параметры t и s, можно получить одно уравнение, связывающее координаты x, y, z точки $M(x, y, z)$ плоскости α, т. е. получить уравнение плоскости α. Проверьте, что оно имеет вид:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

причем числа A, B, C не равны нулю одновременно. Мы таким образом еще раз доказали теорему 37.1 об уравнении плоскости, но уже для любой косоугольной системы координат.

Если из уравнений (6) исключить параметр t, то приходим к уравнениям

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{m_3}. \qquad (8)$$

Они называются **каноническими уравнениями** прямой в пространстве. Эти уравнения выражают пропорциональность координат (m_1, m_2, m_3) направляющего вектора прямой a и переменного вектора $\overrightarrow{AX}$, лежащего на прямой и идущего из фиксированной точки $A \in a$ в переменную точку $X \in a$.

Задачи

Разбираемся в решении

37.1.(6). Выберите три точки с конкретными координатами. Составьте уравнение плоскости, проходящей через эти точки.

Решение

Пусть даны три такие точки: $K(1, -2, 3)$, $L(-1, 2, 0)$ и $M(2, -1, 2)$. Их координаты выбраны произвольно. Для составления уравнения плоскости, проходящей через эти точки, можно пойти разными путями.

Первый путь. Пишем уравнение плоскости в виде

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Подставим в это уравнение координаты всех данных точек. Получим систему из трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными: A, B, C, D. Для ее решения один из неизвестных коэффициентов (скажем D) будем считать параметром и выразим, решая систему, оставшиеся коэффициенты через этот параметр. Если эта система имеет единственное решение (т. е. существует плоскость, причем единственная, проходящая через данные точки), то коэффициенты A, B, C будут иметь вид kD. Подставим эти значения A, B, C в исходное уравнение и, сократив обе его части на D

(в случае $D \neq 0$), придем к искомому уравнению плоскости. Самостоятельно проделайте всю эту работу в данном конкретном случае. Как вы разберетесь со случаем $D=0$?

Второй путь векторный. Пусть точка $T(x, y, z)$ лежит в плоскости KLM. Тогда

$$\overrightarrow{KT}=\alpha\overrightarrow{KL}+\beta\overrightarrow{KM}. \qquad (1)$$

(Можно было выразить $\overrightarrow{LT}$ или $\overrightarrow{MT}$ через оставшиеся векторы. Здесь надо быть аккуратным и проверить, что два вектора, через которые мы выражаем третий, действительно образуют базис плоскости. Как это сделать?)

Запишем координаты векторов. Если O — начало координат, то $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{OL}=(-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{OK}=(1, -2, 3)$, значит, $\overrightarrow{KL}=(-2, 4, -3)$.

Аналогично $\overrightarrow{KM}=(1, 1, -1)$, $\overrightarrow{KT}=(x-1, y+2, z-3)$.

Перепишем равенство (1) в координатном виде:

$$(x-1, y+2, z-3)=\alpha(-2, 4, -3)+\beta(1, 1, -1)=$$
$$=(-2\alpha+\beta, 4\alpha+\beta, -3\alpha-\beta).$$

Отсюда получим систему (?):

$$\begin{cases} x-1=-2\alpha+\beta, \\ y+2=\ \ 4\alpha+\beta, \\ z-3=-3\alpha-\beta. \end{cases} \qquad (2)$$

Выразим α и β из каких-либо двух уравнений системы (2) — проще из второго и третьего уравнения. Получим: $\alpha=y+z-1$, $\beta=-3y-4z+6$.

Подставим полученные значения α и β в первое уравнение системы (2). Окончательно получим: $x+5y+6z-9=0$. Это и будет искомое уравнение плоскости.

Дополняем теорию

37.2.(1). а) Даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Найдите координаты середины отрезка AB. б) Найдите координаты точки K прямой AB, такой, что $|AK|:|KB|=\lambda$.

37.3.(6). Какой фигурой является множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $Ax+By+Cz+D>0$ (<0)?

Рисуем

37.4.(1). В данной системе координат нарисуйте точки $A(1, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(-2, 1, 0)$, $D(-1, -2, -1)$, $K(0, 0, -3)$, $L(-1, -1, 1)$. Нарисуйте отрезок с концами в двух данных точках. Пересекает ли он какую-либо координатную плоскость? ось координат? Проходит ли он через начало координат?

37.5.(5). Нарисуйте каждую из заданных фигур: а) $xy=0$; б) $xyz=0$; в) $x^2+y^2+z^2=0$; г) $|x|=2$; д) $\begin{cases} |x|=1, \\ |y|=1; \end{cases}$ е) $|x|=|y|=|z|=1$; ж) $|x-1|=1$; з) $|z-1|=|z+1|$; и) $x=y=z$; к) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1; \end{cases}$ л) $(x-1)(y-1)(z-1)=0$.

37.6.(6). Нарисуйте плоскость, уравнение которой: а) $x-y=0$; б) $y+z=1$; в) $x+y+z=1$; г) $2x-3y+z=2$.

37.7.(6). Нарисуйте фигуру, заданную условиями: а) $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, $|z|\leqslant 1$; б) $|x|+|y|+|z|\leqslant 2$; в) $|x|+|y|\leqslant 2$, $|y|+|z|\leqslant 2$, $|z|+|x|\leqslant 2$; г) $2x^2+y^2+z^2=1$; д) $x^2+y^2-z^2=1$; е) $z=x^2-y^2$; ж) $x=y^2+z^2$; з) $z^2=x^2+y^2$; и) $x+y+z=2$, $xy+yz+zx=1$.

Представляем

37.8.(1). Укажите расположение точки в координатном пространстве, если: а) ровно одна ее координата равна нулю; б) ровно две ее координаты равны нулю.

37.9.(1). Дана точка $A(2, -1, -3)$. Каковы координаты точки, ближайшей к ней и лежащей на каждой из координатных плоскостей? на каждой из осей координат?

37.10.(5). Какая фигура определяется следующими условиями: $x^2+y^2+z^2=9$ и а) $x=3$; б) $y=-1$; в) $z=-4$; г) $|y|\geqslant 2$; д) $|z|\leqslant 3$; е) $x+y=1$; ж) $y-z=2$; з) $z=x^2+y^2$; и) $y^2+z^2=1$; к) $\begin{cases} x=-2, \\ y=-1? \end{cases}$

37.11.(5). Напишите уравнение какой-либо прямой, которая параллельна: а) одной из координатных плоскостей; б) плоскостям xy и yz; в) оси y.

37.12.(5). Напишите уравнение какой-либо прямой, которая перпендикулярна: а) одной из координатных плоскостей; б) оси x.

37.13.(5). Как расположены между собой прямая a: $\begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases}$ и прямая b: $\begin{cases} y=2, \\ z=1? \end{cases}$

37.14.(6). Напишите уравнение плоскости, перпендикулярной (параллельной) какой-либо из осей координат и проходящей через точку: а) $A(1, 1, 0)$; б) $B(x_0, y_0, z_0)$.

37.15.(6). Напишите уравнение плоскости, удаленной на расстояние $d>0$ от: а) какой-либо из координатных плоскостей; б) каждой из двух каких-либо координатных осей; в) точки с координатами $(1, 2, 3)$.

37.16.(6). Напишите уравнение плоскости, перпендикулярной: а) одной из осей координат; б) одной из плоскостей координат; в) двум координатным плоскостям; г) плоскости $x+z=2$; д) плоскости $x-y+z=1$.

37.17.(6). Напишите уравнение фигуры, состоящей из точек, равноудаленных от плоскостей: а) $x=1$, $x=-4$; б) $x=0$, $y=0$; в) $x+y=1$, $y+z=1$.

37.18.(6). Как расположены относительно друг друга прямые a: $\begin{cases} x+y=1, \\ z=1 \end{cases}$ и b: $\begin{cases} x+z=1, \\ y=1? \end{cases}$

37.19.(6). Прямая задается системой уравнений $\begin{cases} x+y=1, \\ z=3. \end{cases}$ Как она расположена по отношению к плоскостям координат? к осям координат?

37.20.(6). Как расположены прямая $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ и плоскость $x-y=1$?

Работаем с формулой

37.21.(5). Какие из приведенных ниже уравнений являются уравнениями сферы:
а) $x^2-y^2+z^2=1$; б) $x^2+y^2+z^2=1$;
в) $x^2+y^2+z^2=a^2$; г) $x^2+y^2+z^2=1+x$;
д) $2x^2+y^2+z^2=1$; е) $x^2+y^2+z^2-2x+3y-4z=1$?

37.22.(5). Какой фигурой является $F_1 \cap F_2$, где F_1 и F_2 задаются соответственно такими уравнениями:
а) $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=2$;
б) $(x-1)^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+(z+1)^2=1$;
в) $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=100$, $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=50$;
г) $(x-3)^2+y^2+z^2 \geqslant 1$, $(x+3)^2+y^2+z^2 \geqslant 1$?

37.23.(5). Напишите уравнение сферы: а) с центром в точке $(a, -a, a)$ и радиусом a; б) с центром в точке $(1, -1, 1)$ и касающейся одной из координатных плоскостей; в) с центром в точке $(3, 4, -5)$ и касающейся одной из координатных плоскостей; г) проходящей через точку $(2, -3, 1)$ и касающейся одной из координатных плоскостей; д) с центром в точке $(-3, -1, 2)$ и касающейся одной из координатных осей.

37.24.(5). Точка A имеет координаты $(-1, 2, 0)$. Напишите уравнение: а) сферы, проходящей через точку; б) сферы, которой эта точка не принадлежит; в) сферы радиусом 1, проходящей через эту точку.

37.25.(5). Напишите уравнение сферы, проходящей через точки: а) $(-1, -1, -1)$ и $(-1, -3, -1)$; б) $(1, 2, 3)$ и $(4, 5, 6)$; в) $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$ и $(0, 0, 2)$; г) $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1)$ и $(2, 0, 0)$.

37.26.(5). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 2. Точка K — середина ребра CD, точка L — середина ребра B_1C_1, точка M — середина ребра AA_1. Постройте систему координат и напишите уравнение сферы, проходящей через точки: а) A, B, C, D_1; б) A_1, B, C, D; в) A, A_1, D, K; г) A, C, B_1, L; д) B, K, L, M.

37.27.(5). Выберите систему координат и напишите уравнение описанной и вписанной сферы для такого многогранника: а) правильного тетраэдра с ребром 1; б) правильной треугольной призмы с ребром 1; в) правильного октаэдра с ребром 1; г) правильной пирамиды со стороной основания d и высотой h.

37.28.(5). При каких условиях уравнение $ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz=g$ является уравнением сферы?

37.29.(6). Напишите уравнение плоскости, удаленной на 1 от плоскости $x+y+z-1=0$.

37.30.(6). Напишите уравнение плоскости, все точки которой равноудалены от точек: а) $(0, a, 0)$ и $(0, -a, 0)$; б) (a, b, c) и $(a, -b, -c)$; в) $(1, 1, 1)$ и $(2, 2, 1)$; г) $(-1, 2, -3)$ и $(2, -1, 0)$.

37.31.(6). Напишите уравнение плоскости, если известна длина перпендикуляра, проведенного к ней из начала координат, и углы, которые он составляет с осями координат.

37.32.(6). Даны две точки. Напишите уравнение плоскости, проходящей через эти точки и параллельной какой-либо координатной оси.

37.33.(6). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Начало координат находится в точке B, оси координат проходят через точки A, B_1, C. Напишите уравнения: а) плоскостей, совпадающих с его гранями; б) плоскостей, проходящих через два его параллельных ребра; в) (ACB_1); г) плоскости, проходящей через центр куба перпендикулярно его диагонали; д) плоскости, проходящей через центр грани куба перпендикулярно его диагонали.

37.34.(6). Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Выберите систему координат и напишите уравнения: а) его граней; б) плоскости, проходящей через две его высоты; в) плоскости, которая пересекает его по квадрату.

37.35.(6). Выберите систему координат и задайте неравенствами следующие фигуры: а) прямоугольный параллелепипед; б) правильный тетраэдр; в) правильную треугольную призму.

Находим величину

37.36.(1). Точки (1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (1, 2, 1) являются вершинами куба. Каковы координаты остальных его вершин?

37.37.(1). Точки (1, 0, 0) и (−1, 0, 0) являются вершинами правильного тетраэдра, основание которого лежит в плоскости xy. Каковы координаты остальных его вершин?

37.38.(2). Даны точки $A(5, -1, 3)$, $B(1, 2, -6)$, $C(-3, 3, 2)$. Какая из них ближе всего к началу координат? к каждой из координатных плоскостей? к каждой из координатных осей?

37.39.(2). Найдите центр и радиус сферы, проходящей через такие точки: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (−1, −1, −1).

37.40.(5). Сфера F задается уравнением $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=1$. Найдите координаты точки этой сферы: а) ближайшей к точке O; б) самой далекой от точки O; в) ближайшей к каждой из координатных плоскостей; г) самой далекой от каждой из координатных плоскостей; д) ближайшей к каждой из координатных осей; е) самой далекой от каждой из координатных осей; ж) ближайшей к точке (2, 2, 2); з) самой далекой от точки (2, 2, 2).

37.41.(5). Сфера задана уравнением $x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Вычислите расстояние от нее до: а) плоскости, уравнение которой $x=3$; б) плоскости, уравнение которой $z=3$; в) фигуры, уравнение которой $(x-1)^2+y^2+z^2=1$.

37.42.(6). Вычислите расстояние от начала координат до фигуры, заданной условиями: а) $x+y-z=2$; б) $\begin{cases} x\geqslant 5, \\ y\geqslant 5, \\ z\geqslant 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 1, \\ z\geqslant 1; \end{cases}$ г) $1\leqslant x+y\leqslant 2$.

Доказываем

37.43.(7). а) Дано уравнение плоскости и уравнение сферы. Докажите, что пересечение плоскости и сферы, отличное от точки, является окружностью. б) Даны уравнения двух сфер. Докажите, что пересечение двух сфер, отличное от точки, является окружностью.

Исследуем

37.44.(1). Можете ли вы: а) зная координаты трех вершин параллелограмма, найти его четвертую вершину; б) зная координаты трех вершин правильного тетраэдра, найти его четвертую вершину; в) зная координаты четырех вершин параллелепипеда, найти его остальные вершины; г) зная координаты середин ребер тетраэдра, найти его вершины?

37.45.(2). Сколько решений имеет уравнение:

а) $\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=a$ при $a=1$, $\sqrt{2}$, 2;

б) $\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}=a$ при $a=2$, $\sqrt{6}$, 3?

37.46.(5). Дана сфера $x^2+y^2+z^2=25$. Установите расположение относительно нее прямой AB, если:
а) $A(0,\ 0,\ 6)$, $B(3,\ 3,\ 0)$; б) $A(0,\ -2,\ 2)$, $B(2,\ 0,\ -2)$; в) $A(-6,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ -6,\ 0)$; г) $A(-4,\ 0,\ -4)$, $B(0,\ 4,\ 4)$.

37.47.(5). а) Имеет ли решения система
$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$?
б) Сколько решений имеет система в зависимости от значений a:
$(x-a)^2+y^2+z^2=x^2+(y-a)^2+z^2=x^2+y^2+(z-a)^2=1$?

37.48.(6). Установите взаимное расположение плоскостей:
а) $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;
б) $2x-y+5z-4=0$, $5x+2y-13z+23=0$, $3x-z+5=0$;
в) $5x+2y-6=0$, $x+3y-3z=0$, $3x+2z-1=0$, $2x+3y+z+8=0$.

Рассуждаем

37.49.(5). Фигура F задается уравнением:
а) $x^2+y^2+z^2=5$; б) $xyz=5$; в) $y^2=xz$.
Какая фигура получится в сечении данной фигуры F:
1) плоскостью $x=1$; 2) плоскостью $y=1$?

37.50.(6). Как расположена плоскость по отношению к осям координат и к плоскостям координат, если в ее уравнении нет одной координаты? двух координат?

Задачи к главе VIII

Находим величину

VIII.1. Пусть $PABC$ — тетраэдр. Плоскость пересекает ребра тетраэдра PA, PB, CB, CA в точках K, L, M, N. Пусть $PK:KA=\lambda_1$, $PL:LB=\lambda_2$, $CM:MB=\lambda_3$. Найдите отношение $CN:NA$.

VIII.2. В основании пирамиды $PABCD$ квадрат со стороной 1. $(PA)\perp(ABC)$, $|PA|=1$. Через точку A провели плоскость, параллельную (BD), проходящую через середину ребра PC. Вычислите площадь сечения.

VIII.3. В тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $2x+3y-5z+10=0$, вписан куб. Одна из его вершин лежит в начале координат, три ребра, выходящие из этой вершины, лежат на осях координат, а вершина, противоположная началу координат, лежит в указанной плоскости. Найдите длину ребра куба.

VIII.4. Основанием тела является фигура, задаваемая такими условиями: $|x|\leqslant y\leqslant 1$, $z=0$. Каждое сечение тела, перпендикулярное оси y, является треугольником. Координаты вершины этого треугольника, не лежащей в плоскости $z=0$, удовлетворяют условиям $y^2+z^2=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $x=0$. Вычислите объем тела.

VIII.5. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:
а) $x^2+y^2=1$, $z=x$, $z=0$; б) $x^2+z^2=1$, $y^2+z^2=1$;
в) $z^2=1-x$, $x^2+y^2=x$; г) $x+y+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

VIII.6. Найдите объем тела, граница которого задана такими условиями: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$, $x\leqslant y+1{,}5z$, $y\leqslant x+1{,}5z$, $z\leqslant \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y$.

Ищем границы

VIII.7. В правильной пирамиде $PABCD$ ребро основания равно 1, а боковое ребро равно 2. Переменный отрезок имеет один конец на отрезке BD, а другой конец на отрезке PC. При этом он параллелен (PAD). В каких границах лежит его длина?

Доказываем

VIII.8. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — усеченная треугольная пирамида, точки K, L, M — середины ребер BC, CA, AB. Докажите, что отрезки A_1K, B_1L, C_1M имеют общую точку.

VIII.9. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Докажите, что на прямой AC есть такая точка K, а на прямой DC_1 есть такая точка L, что $(KL)\parallel(BD_1)$. Сколько таких пар точек можно найти на этих прямых?

VIII.10. Докажите, что отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер тетраэдра, проходит через точку пересечения диагоналей любого сечения тетраэдра, параллельного этим ребрам.

VIII.11. Даны три единичных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}+\vec{c}$ перпендикулярны. Докажите такое же свойство для других пар данных векторов. Дайте наглядное истолкование полученному результату. Обобщается ли данное утверждение?

VIII.12. В прямоугольном тетраэдре соединили отрезками середины противоположных ребер. Докажите, что все такие отрезки равны.

VIII.13. Дана система $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$, $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$. Пусть (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) — два ее решения, числа p и q таковы, что $p+q=1$. Тогда числа x, y, z, равные соответственно px_1+qx_2, py_1+qy_2, pz_1+qz_2, также являются решениями этой системы. Докажите это, используя геометрические соображения.

Исследуем

VIII.14. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Прямая пересекает три прямые: AB_1, BC_1, CD_1. Как она расположена по отношению к прямой DA_1?

VIII.15. Пусть $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ — ортонормированный базис пространства. Через точку O проводится любая плоскость, и этот базис проектируется на нее ортогонально. Пусть известны длины составляющих на этой плоскости для двух векторов базиса. Сможете ли вы найти длину составляющей на этой плоскости для третьего вектора базиса?

VIII.16. Пусть $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$. а) Докажите, что $\angle\vec{a}\vec{b}=\angle\vec{c}\vec{d}$. б) Что еще можно доказать из условия? в) Составьте и проверьте обратное утверждение.

VIII.17. Какую фигуру образуют все точки X пространства, такие, что $XA:XB=k$, где A и B — данные точки, а $k>0$?

VIII.18. Какую фигуру образуют все точки пространства, координаты которых удовлетворяют условию: а) $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}=3$; б) $z\geqslant 0$, $0\leqslant x-z\leqslant 1$, $0\leqslant y-z\leqslant 2$; в) $x+z\leqslant 2$, $x-z\geqslant 0$, $y-z\geqslant 0$, $y+z\leqslant 2$, $z\geqslant 0$?

VIII.19. а) Сможете ли вы, зная координаты вершин одной из граней правильного многогранника, найти координаты остальных его вершин? б) Выберите систему координат и задайте в ней координаты вершин правильного октаэдра.

VIII.20. Даны сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ и плоскость, уравнение которой $Ax+By+Cz+D=0$. При каком условии на коэффициенты в уравнении плоскости сфера касается этой плоскости?

VIII.21. Известны расстояния от данной точки до трех вершин прямоугольника. Сможете ли вы найти расстояние от нее до четвертой его вершины?

VIII.22. В грани правильного тетраэдра лежит точка. Требуется вычислить расстояние от нее до противоположной вершины тетраэдра. Сколько расстояний между данными точками вам потребуется узнать для этого?

VIII.23. Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ не лежат в одной плоскости. Выразите угол между $\overrightarrow{OC}$ и плоскостью OAB через эти векторы. Пусть известно разложение каждого из этих векторов в ортонормированном базисе. Проведите вычисления этого угла по полученной формуле.

VIII.24. На плоскую поверхность падает луч света. Пусть единичный направляющий вектор этого луча $\vec{a}$, единичный нормальный вектор поверхности $\vec{n}$ и единичный направляющий вектор отраженного луча $\vec{b}$. Выразите $\vec{b}$ через $\vec{a}$ и $\vec{n}$. Пусть известны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$ по выведенной вами формуле.

Прикладная геометрия

VIII.25. Из проволоки сделан каркас куба. Где находится центр масс фигуры, получающейся после удаления из каркаса: а) одного ребра; б) двух параллельных ребер; в) двух скрещивающихся ребер; г) двух пересекающихся ребер; д) трех ребер, выходящих из одной точки; е) трех попарно скрещивающихся ребер?

VIII.26. На два крюка в потолке на равных тросах подвешен за концы стержень. Почему он будет горизонтальным? Предположим теперь, что тросы имеют разную длину. Как узнать, какой угол с горизонтальной плоскостью образует стержень?

Участвуем в олимпиаде

VIII.27. Вектор проектируется на прямые, проходящие через все ребра правильного тетраэдра. Чему равна сумма всех его составляющих на этих прямых?

VIII.28. Даны четыре единичных вектора. Углы между каждыми двумя равны. Вычислите: а) сумму векторов; б) углы между ними.

VIII.29. В многогранник с n гранями можно вписать сферу. Докажите, что сумма косинусов его двугранных углов не превосходит $\frac{n}{2}$.

VIII.30. $x+y+z=a$. Докажите, что $x^2+y^2+z^2>\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Можно ли усилить неравенство?

Рассуждаем

VIII.31. Каждый из двух векторов параллелен одной и той же плоскости. Объясните, почему их сумма (и разность) параллельна той же плоскости. Обобщите это утверждение.

Глава IX

Преобразования

И в планиметрии, и в стереометрии мы уже рассматривали многие преобразования: различные виды движений, подобия, параллельное и центральное проектирования, инверсию, изгибания поверхностей и др. Ранее мы использовали различные преобразования для исследования фигур — преобразования были средством исследования. В этой главе преобразования становятся объектом, а не средством исследования. В ней речь пойдет об общих свойствах, о способах задания и о классификации преобразований трех самых важных групп преобразований элементарной геометрии: движений (см. § 38—42), аффинных преобразований (см. § 43), проективных преобразований (см. § 44). Для движений все эти вопросы решаются очень подробно, а для аффинных и проективных преобразований — обзорно.

Теория преобразований позволяет по-новому взглянуть на предмет геометрии. Об этом рассказано в последнем параграфе этой главы.

§ 38. Движения и их общие свойства

38.1. Отображения

Напомним, что **отображение какого-либо множества *M* в некоторое множество *N*** состоит в том, что каждому элементу из M сопоставляется один-единственный элемент из N, т. е. отображением множества M в множество N называется соответствие каждому элементу из M единственного элемента из N.

Мы будем рассматривать только отображение фигур в пространстве. Никакие другие отображения не рассматриваются, и потому слово «отображение» означает соответствие точкам точек.

О точке X', соответствующей при данном отображении f точке X, говорят, что она является **образом точки** X, и пишут $X'=f(X)$. Множество точек X', соответствующих точкам фигуры M, при отображении f называется **образом фигуры** M и обозначается $M'=f(M)$.

Если образом M является вся фигура N, т. е. $f(M)=N$, то говорят об отображении фигуры M **на фигуру** N.

Отображение по определению сопоставляет точке единственную точку. Однако отображение может сопоставлять одну и ту же точку разным точкам. Так, например, происходит при проектировании на плоскость: одной точке проекции F' фигуры F отвечают все проектирующиеся в нее точки (все, которые лежат на проектирующей прямой, проходящей через нее).

Если при данном отображении разным точкам фигуры соответствуют разные образы, то отображение называют **взаимно однозначным**.

Пусть заданы два отображения: отображение f множества M в множество N и отображение g множества N в множество P.

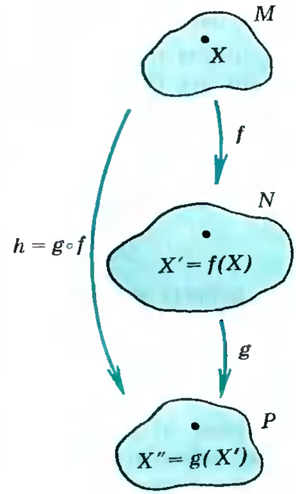


Рис. 238

Если при отображении f точка $X \in M$ перешла в точку $X'=f(X) \in N$, а затем X' при отображении g перешла в точку $X'' \in P$, то тем самым в результате X перешла в X'' (рис. 238). Это записывается так: $X''=g \circ f(X)$.

В результате получается некоторое отображение h множества M в множество P. Поскольку при отображении h образом каждой точки X является точка $X''=g \circ f(X)$, то пишут, что $h=g \circ f$.

Отображение h называется **композицией отображения f с последующим отображением** g. Композицией называется и операция последовательного отображения и результирующее отображение.

Пусть у нас есть взаимно однозначное отображение f множества M на N. Тогда каждая точка X' множества N является образом только одной (единственной) точки X множества M. Действительно, в противном случае отображение f переводило бы в одну и ту же точку X' две различные точки X_1 и X_2 множества M, что невозможно, поскольку отображение f взаимно однозначное. Поэтому каждой точке $X' \in N$ можно поставить в соответствие ту единственную точку $X \in M$, образом которой при отображении f является точка X'. Тем самым мы определим отображение множества N на множество M. Оно называется обратным для отображения f и обозначается f^{-1}. Если отображение f имеет обратное, то оно называется **обратимым**.

Если данное отображение f обратимо, то, применяя его, а потом обратное ему отображение f^{-1}, вернем, очевидно, все точки в исходное положение, т. е. получим **тождественное отображение**, такое, которое каждой точке сопоставляет эту же точку.

Обозначая тождественное отображение множества M через E_M, можно записать:

$$f^{-1}\circ f=E_M,\ f\circ f^{-1}=E_N.$$

Из данных определений непосредственно следует, что если отображение f обратимо, то обратное ему отображение f^{-1} также обратимо и

$$(f^{-1})^{-1}=f.$$

Поэтому отображения f и f^{-1} называются также **взаимно обратными.**

Неподвижной точкой отображения φ называется такая точка A, что $\varphi(A)=A$.

В том случае, когда задано отображение f множества M в то же множество M, говорят о **преобразовании f множества** M.

38.2. Движения и равенство фигур

Напомним, что **движением фигуры** называется такое ее отображение, при котором каждым двум ее точкам A и B соответствуют такие точки A' и B', что $|A'B'|=|AB|$ (рис. 239). Короче: *движение — это отображение, сохраняющее расстояния.*

Очевидно, *тождественное отображение является движением.*

В этой книге впервые было сказано о движении, не называя его явно, в п. 1.4 в определении равенства фигур: фигура F' называется равной фигуре F, если существует отображение фигуры F на F', сохраняющее расстояния.

Теперь мы можем это выразить так: **фигура F' называется равной фигуре F, если она может быть получена из F движением.**

Геометрическое понятие движения появилось при изучении реальных движений тел. В нем только не учитывается тот процесс движения, которым тело из одного положения переходит в другое, а принимается во внимание только результат: соответствие между старым и новым положением тела или фигуры. Это и выражено в словах: «фигура F' получается из F движением».

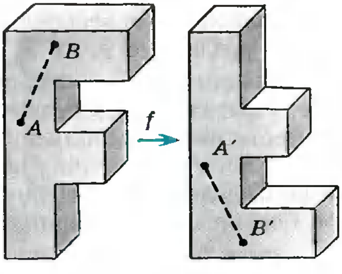


Рис. 239

Для наглядности можно представлять себе реальное движение фигуры F на место F'. Говорят: «точки фигуры F переместились» и т. п. Однако нужно вместе с тем понимать, что это не совсем точно. Строго говоря, точки пространства не перемещаются, а только сопоставляются одни другим. Это подобно тому, что происходит при отражении в зеркале: предмет, отражаясь в зеркале, не переходит за зеркало, а изображается в нем; его точкам соответствуют точки изображения. Этой наглядной картине и соответствуют термины «отображение», «образ», «прообраз».

Отображение в зеркале как раз представляет реальный пример движения в геометрическом смысле (как отображения, сохраняющего расстояния). Но его нельзя получить непрерывным движением, как нельзя непрерывным движением превратить правую перчатку в левую; в зеркале же она изображается как левая.

Словом, движения в геометрическом смысле бывают двух видов: одним из них соответствуют реальные перемещения (движения) тел, а другим нет. На этом важном факте мы еще остановимся подробнее. Сейчас же мы отмечаем это, в частности, затем, чтобы не возникла мысль, будто геометрическое движение всегда соответствует реальному перемещению тел.

Из определений соответствующих понятий непосредственно вытекает:

1) *движение взаимно однозначно;*

2) *движение обратимо и отображение, обратное для движения, само является движением;*

3) *композиция движений есть движение.*

Замечание. Когда с реальным телом совершают сначала одно, а затем другое движение, то понимают так, что второе движение происходит с тем же телом. В геометрии же это не так!

Если геометрическая фигура подвергнута движению и получается фигура F', то второе отображение применяется к F'. Для исходного F оно может быть и не определено, так как второе отображение перемещает точки фигуры F', но не F (если у F' есть точки, не принадлежащие F). Так происходит при вторичном отражении в зеркале, когда отражается не сам предмет, а его отражение в первом зеркале.

Сказанное здесь надо иметь в виду, когда речь идет о композиции движений и об отображении, обратном движению.

▲ 38.3. Механическое и геометрическое движение

Выясним более подробно связь того движения, которое определено в геометрии, с реальным движением тел.

Представим себе какое-нибудь реальное тело T в некотором определенном положении. Каждая его частица занимает определенное положение — находится в определенной точке X пространства. Допустим, предмет изменил свое положение. Это значит, каждая его частица заняла некоторое новое (или, в частности, старое) положение. Данная частица, бывшая в точке X, заняла положение в точке пространства X'; тем самым движение предмета устанавливает соответствие между точками пространства: точка X' соответствует точке X. (Можно сказать еще так: «месту X, где находилась частица, соответствует место X', где она теперь находится».)

В механике тело называется твердым или даже абсолютно твердым, если оно не допускает никаких деформаций, так что расстояния между его частицами неизменны. Поэтому если при движении такого тела две его частицы из точек X и Y перешли в точки X' и Y', то расстояния сохраняются: $|X'Y'|=|XY|$, т. е. происходит движение, как мы его определили геометрически.

В геометрическом понятии движения удерживают только сопоставление одного положения тела с другим, вовсе отвлекаясь от процесса движения. Сам этот процесс мы будем называть непрерывным движением.

Оказывается, однако, что любое движение в геометрии представляет собой либо отвлеченный образ реального движения твердого тела, когда учитывается только то, из каких точек пространства в какие точки переходят частицы тела (т. е. учитывается только соответствие одних точек другим), либо сочетание (композицию) этого отвлеченного образа реального движения с отражением в плоскости (отражение в плоскости рассмотрим в § 41).

Замечание. Только что сказанное о движениях принадлежит не самой геометрии, а ее связи с физикой. Можно сказать, что геометрия выступает здесь как первая глава механики, трактующая механическое движение. Без движений геометрия не могла бы существовать. В самом деле, уже сравнение отрезков и измерение длин основано на движении предметов, когда один прикладывается к другому. И должно быть понятно, почему Ньютон в предисловии к своему великому труду «Математические начала натуральной философии» писал, что геометрия основывается на механике. ▼

38.4. Общие свойства движений

Движения сохраняют расстояния и потому сохраняют все геометрические соотношения, поскольку они определяются расстояниями. В этом пункте мы перечислим ряд самых общих из этих свойств, сопровождая их доказательствами.

Свойство 1 (*сохранение прямолинейности*)

При движении три точки, лежащие на прямой, переходят в три точки, лежащие на прямой, причем точка, лежащая между двумя другими, переходит в точку, лежащую между образами двух других точек.

Доказательство. Из планиметрии известно, что три точки A, B, C лежат на прямой тогда и только тогда, когда одна из них, например точка B, лежит между двумя другими — точками A и C, т. е. когда выполняется равенство

$$|AB|+|BC|=|AC|. \tag{38.1}$$

При движении расстояния сохраняются, а значит, соответствующее равенство выполняется и для точек A', B', C':

$$|A'B'|+|B'C'|=|A'C'|. \tag{38.2}$$

Таким образом, точки A', B', C' лежат на одной прямой и именно точка B' лежит между A' и C'. ■

Свойство 2

Образом отрезка при движении является отрезок.

Доказательство. Пусть при движении отрезка AB его концы отобразились — A на A' и B на B'. Любая точка X отрезка AB отобразилась в какую-то точку X' отрезка $A'B'$ (по свойству 1). При этом образом отрезка AB будет именно весь отрезок $A'B'$, а не какая-то его часть. В самом деле, любая точка Y' отрезка $A'B'$ является образом некоторой точки Y отрезка AB, именно той его точки Y, которая удалена от точки A на расстояние $|A'Y'|$. ■

Свойство 3

Образом прямой при движении является прямая, а образом луча — луч.

Доказательство. Прямая может быть представлена как объединение неограниченно расширяющихся в обе стороны отрезков: $A_1B_1 \subset A_2B_2 \subset A_3B_3 \subset \ldots$ (рис. 240). Поэтому из свойства 2 следует, что при движении прямая отображается на прямую. Аналогично доказательство верно и для луча (рис. 241). ■

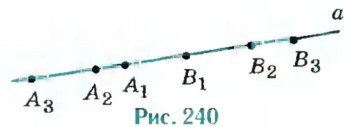


Рис. 240

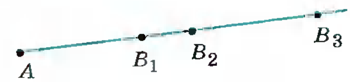


Рис. 241

Свойство 4

При движении образом треугольника является равный ему треугольник, образом плоскости — плоскость, причем параллельные плоскости отображаются на параллельные плоскости, образом полуплоскости — полуплоскость.

Доказательство. Треугольник ABC представляет собой объединение отрезков AX с концами X на отрезке BC. При движении отрезки отображаются на отрезки, и потому треугольник отображается на треугольник. Длины сторон сохраняются по определению движения, а углы (точнее, величины углов) сохраняются, так как они выражаются через длины сторон (по теореме косинусов).

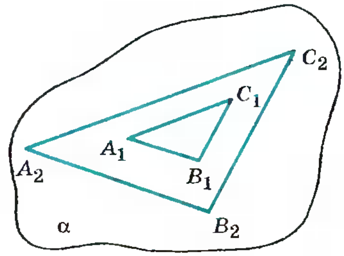


Рис. 242

Плоскость можно представить как объединение неограниченно расширяющихся треугольников (рис. 242). Поэтому при движении плоскость отображается на плоскость (а не на какую-либо ее часть).

Полуплоскость можно представить как объединение неограниченно расширяющихся треугольников, у которых одна сторона лежит на прямой (рис. 243). Поэтому полуплоскость отобразится на полуплоскость.

Поскольку движение сохраняет расстояния, то расстояние между фигурами при движениях не изменяется. Отсюда следует, в частности, что при движении параллельные плоскости переходят в параллельные. ■

Свойство 5

При движении образом тетраэдра является тетраэдр, образом пространства — все пространство, образом полупространства — полупространство.

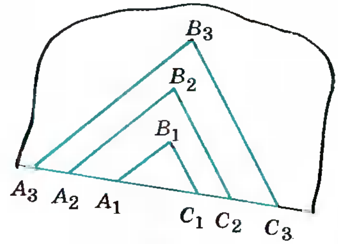


Рис. 243

Доказательство. Тетраэдр $PABC$ представляет собой объединение отрезков PX с концами X в треугольнике

ABC. При движении отрезки отображаются на отрезки, и поэтому тетраэдр отображается на тетраэдр.

Пространство можно представить как объединение неограниченно расширяющихся тетраэдров, поэтому при движении пространство отображается на пространство.

Полупространство можно представить как объединение неограниченно расширяющихся тетраэдров, у которых основания лежат в граничной плоскости полупространства. Поэтому при движении образом полупространства будет полупространство. ■

Свойство 6

При движении углы сохраняются, т. е. всякий угол отображается на угол того же вида и той же величины. Аналогичное верно и для двугранных углов.

Доказательство. При движении полуплоскость отображается на полуплоскость. Так как выпуклый угол есть пересечение двух полуплоскостей, а невыпуклый угол и двугранный угол есть объединение полуплоскостей, то при движении выпуклый угол переходит в выпуклый угол, а невыпуклый угол и двугранный угол соответственно в невыпуклый и двугранный угол.

Пусть лучи a и b, исходящие из точки O, отобразились на лучи a' и b', исходящие из O'. Возьмем треугольник AOB с вершинами $A \in a$ и $B \in b$ (рис. 244). Он отобразится на равный треугольник $O'A'B'$ с вершинами $A' \in a'$, $B' \in b'$, и , значит, углы между лучами равны. Поэтому при движении величины углов сохраняются.

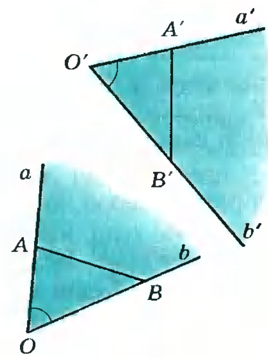


Рис. 244

Следовательно, сохраняется перпендикулярность прямых и, значит, перпендикулярность прямой и плоскости. Поэтому, вспоминая определения величины двугранного угла и угла между прямой и плоскостью, получим, что величины этих углов сохраняются. ■

38.5*. О распространении движения на пространство

Чтобы понять, насколько проще рассматривать движение всего пространства, попробуйте, например, доказать, что движение дуги окружности дает дугу окружности. Дуга берется сама по себе, так что про отрезки, соединяющие ее точки, ничего нельзя сказать, их отображение не определено.

Почему образом дуги при движении должна быть плоская фигура? Ответ на этот вопрос становится очевидным, если распространить движение с дуги на все пространство, т. е. считать, что движение дуги происходит вместе с движением всего пространства: ведь мы уже доказали, что при движении образом плоскости является плоскость, а значит, образ дуги содержится в образе плоскости, содержащей дугу. Но нет ли таких движений фигуры, которые нельзя распространить на все пространство?

Оказывается, что таких движений нет. Именно выполняется следующая теорема:

Теорема 38.1

Каждое движение любой фигуры может быть распространено на любую объемлющую ее фигуру и, в частности, на все пространство.

При этом то, что данное движение фигуры F «распространяется» на фигуру $G \supset F$, означает следующее: существует такое движение фигуры G, при котором фигура F претерпевает данное ее движение.

Образно говоря, движение части тела распространяется на все тело, как движение ручки передается на весь предмет (рис. 245).

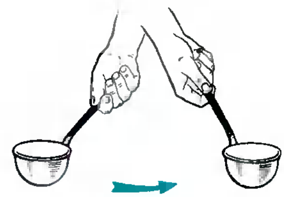


Рис. 245

Сначала мы будем изучать лишь такие конкретные виды движений, для которых возможность их распространения на все пространство будет очевидна. Теорема 38.1. будет рассмотрена в п. 40.2, а при решении задач ее можно использовать уже сейчас.

Задачи

Дополняем теорию

38.1. Докажите, что в результате движения: а) выпуклый многогранник переходит в выпуклый многогранник; б) замкнутая область переходит в замкнутую область; в) тело переходит в тело.

38.2. Докажите, что в результате движения: а) шар переходит в шар; б) цилиндр переходит в цилиндр; в) конус переходит в конус.

Представляем

38.3. Возможно ли обратимое отображение: а) поверхности куба на поверхность прямоугольного параллелепипеда; б) сферы на поверхность куба; в) поверхности правильной треугольной пирамиды на поверхность правильной четырехугольной пирамиды; г) сферы с выколотой точкой на плоскость?

38.4. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — ортонормированный базис пространства, f — движение, $f(\vec{i})=\vec{j}$, $f(\vec{j})=\vec{i}$. Чему равно $f(\vec{k})$?

38.5. В результате некоторого отображения сфера перешла в другую сферу. а) Является ли это отображение движением? б) Является ли оно подобием? в) А если сфера отобразилась на себя?

Доказываем

38.6. Обратимое отображение пространства переводит каждую прямую в прямую. Докажите, что оно каждую плоскость переведет в плоскость. Будет ли верно обратное утверждение?

38.7. Пусть f — движение пространства. Докажите, что:

а) $f(x\vec{a}+y\vec{b})=xf(\vec{a})+yf(\vec{b})$; б) $f(\vec{a})\cdot f(\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

38.8. При движении f две точки A и B перешли в себя. Докажите, что каждая точка прямой AB перешла в себя. Основываясь на результате этой задачи, ответьте на вопрос: «Может ли движение пространства иметь ровно две неподвижные точки?»

38.9. В результате некоторого движения три точки, не лежащие на одной прямой, остались неподвижными. а) Докажите, что в этом движении остается неподвижной некоторая плоскость. б) Может ли движение пространства иметь ровно три неподвижные точки? четыре?

38.10. В результате движения шар перешел в себя. Докажите, что это движение имеет неподвижные точки.

38.11. Докажите, что два шара равны, если равны их радиусы. При каком условии равны два цилиндра?

Исследуем

38.12. Пусть $\vec{a}\neq\vec{0}$ и f — движение пространства. Как можно определить $f(\vec{a})$? Что при этом требуется доказать?

38.13. Нас будут интересовать такие свойства отображения пространства: 1) Является ли оно обратимым? 2) Имеет ли оно неподвижные точки? 3) Имеются ли такие прямые (плоскости), которые при этом отображении отображаются на себя? Ответьте на эти вопросы для отображений пространства, которые точке (x, y, z) ставят в соответствие точку: а) $(-x, y, z)$; б) $(x, -y, -z)$; в) $(-x, -y, -z)$; г) $(|x|, y, z)$; д) $(x, y, 0)$; е) $(0, 0, z)$; ж) $(x+a, y+b, z+c)$; з) $(2-x, y, z)$; и) (z, x, y); к) $(2x, y, z)$; л) $(2x, \frac{1}{2}y, z)$; м) $(x+y, y, z)$; н) $(x+y, y+z, z+x)$.

Нарисуйте куб и посмотрите, каким будет его образ в этом отображении.

38.14. Отображение f задано следующим образом: а) $f(\vec{x})=\vec{x}+\vec{a}$; б) $f(\vec{x})=k\vec{x}$; в) $f(\vec{x})=(\vec{x}\cdot\vec{a})\cdot\vec{a}$; г) $f(\vec{x})=(\vec{a}\cdot\vec{x})\cdot\vec{x}$. При этом все векторы откладываются от одной точки. Выполните то же задание, что и в задаче 38.13.

38.15. Отображение f задано следующими условиями: $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$ и $f(k\vec{x})=kf(\vec{x})$. При этом все векторы откладываются от одной точки. Приведите примеры таких отображений плоскости на себя. Является ли таким отображением параллельное проектирование? Найдите $f(\vec{0})$, $f^{-1}(\vec{0})$. Какое из отображений из задачи 38.13 отвечает этим условиям? Ответьте на вопросы из задачи 38.13 для такого отображения.

38.16. Зафиксируем точку O в пространстве и рассмотрим такое его отображение, которое каждой точке X ставит в соответствие точку X_1, такую, что $X_1 \in (OX)$ и $|OX_1| \cdot |OX| = 1$. Ответьте на вопросы задачи 38.13 для этого отображения.

38.17. Является ли движением отображение из задач 38.13, 38.14, 38.15, 38.16?

38.18. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — базис пространства. Возьмем движение пространства f, и пусть $f(\vec{a}) = \vec{a}_1$, $f(\vec{b}) = \vec{b}_1$, $f(\vec{c}) = \vec{c}_1$. а) Будут ли векторы $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ базисом пространства? б) Если будут, то сохранится ли ориентация базиса?

Рассуждаем

38.19. Движение пространства f имеет неподвижную точку. а) Имеет ли неподвижную точку f^{-1}? б) Имеет ли неподвижную точку движение $f \circ f$?

38.20. Даны две точки A и B. При движении пространства f оказалось, что $f(A) = B$ и $f(B) = A$. Имеет ли неподвижные точки движение $f \circ f$?

§ 39. Частные виды движений пространства

39.1. Параллельный перенос

Определение

Параллельным переносом, или, короче, переносом фигуры, называется такое ее отображение, при котором все ее точки смещаются в одном и том же направлении на равные расстояния (рис. 246), т. е. при переносе каждым двум точкам X и Y фигуры сопоставляются такие точки X' и Y', что

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}. \qquad (39.1)$$

Основное свойство переноса содержится в следующем утверждении:

Параллельный перенос сохраняет расстояния и направления, т. е. любым двум точкам X и Y соответствуют такие точки X' и Y', что

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{XY}. \qquad (39.2)$$

Действительно, по определению переноса выполняется равенство (39.1), а тогда выполняется и (39.2).

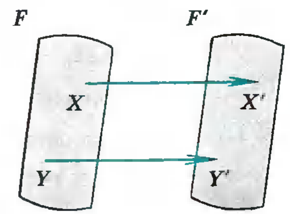


Рис. 246

Поскольку отображение, сохраняющее расстояние, есть движение, то это же свойство можно сформулировать и так:

Параллельный перенос есть движение, сохраняющее направления.

Утверждение, обратное основному свойству, дает признак параллельного переноса.

Движение, сохраняющее направления, есть параллельный перенос.

Для доказательства его достаточно заметить, что из (39.2) следует (39.1.).

Из этих двух взаимно обратных утверждений непосредственно вытекает, ***что композиция параллельных переносов есть параллельный перенос.***

Действительно, композиция двух движений, сохраняющих направления, есть движение, сохраняющее направления, т. е. параллельный перенос.

Когда передвигают предмет с одного места на другое, толкая его прямо, то и происходит реальное параллельное смещение предмета, а соответствие между прежним и новым его положением и является переносом, понимаемым как геометрическое отображение.

Параллельный перенос фигуры задается указанием одной пары соответствующих точек: если указано, в какую точку A' переходит данная точка A, то известно, куда переходит любая точка X фигуры; она переходит в такую точку X', что

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'}. \tag{39.3}$$

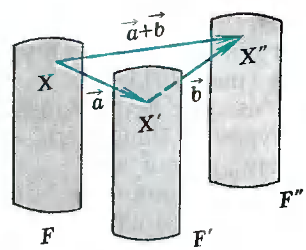


Рис. 247

Можно сказать: *перенос задается вектором* $\overrightarrow{AA'}$, и векторное равенство (39.3) означает, что все точки смещаются на один и тот же вектор. Следовательно, всякий перенос задается некоторым вектором $\vec{a}$, т. е. $\overrightarrow{XX'} = \vec{a}$ для всех точек X.

Параллельный перенос любой фигуры можно распространить на все пространство, стоит лишь сместить все его точки на тот же вектор, на который смещаются точки фигуры.

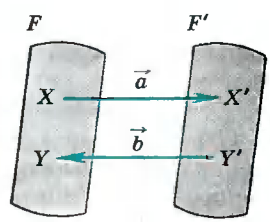


Рис. 248

▲ Векторы и параллельные переносы

Между векторами и переносами есть полное соответствие: 1) *каждый вектор определяет перенос* и обратно: *каждому переносу соответствует вектор*; 2) *сложение векторов соответствует композиции переносов* (рис. 247) и *противоположный вектор — обратному переносу* (рис. 248). (Обоснуюте самостоятельно второе утверждение.) Это обстоятельство позволяет даже отождествить векторы с переносами. ▼

39.2. Центральная симметрия

Центральная симметрия известна в планиметрии для плоских фигур. В пространстве она определяется совершенно так же.

Определение

Точки A и A' называются симметричными относительно точки O, если она делит отрезок AA' пополам (рис. 249). Точка O считается симметричной сама себе (относительно O).

Рис. 249

Две фигуры называются симметричными относительно точки O, *если они состоят из попарно симметричных точек,* т. е. если для каждой точки одной фигуры есть симметричная ей относительно точки O точка в другой фигуре и обратно (рис. 250).

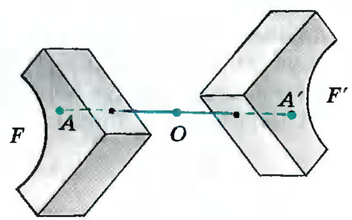


Рис. 250

В частности, фигура может быть симметрична сама себе относительно некоторой точки O. Тогда для каждой ее точки в ней есть точка, симметричная относительно O. Эта точка O называется **центром симметрии фигуры,** а фигура — **центрально-симметричной** (рис. 251).

Мы уже встречались с центрально-симметричными фигурами. Например, на плоскости это параллелограмм, круг и др.

Можно заметить, что шар имеет центр симметрии; очевидно, им служит центр шара (рис. 252, *а*). Далее, всякий параллелепипед имеет центр симметрии: им служит точка пересечения его диагоналей (рис. 252, *б*).

Определение

Центральной симметрией фигуры с центром O называется такое отображение этой фигуры, которое сопоставляет каждой ее точке точку, симметричную относительно O.

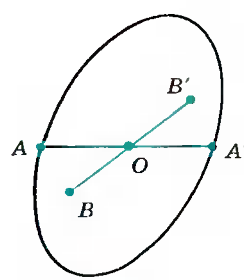
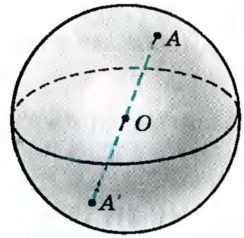


Рис. 251

Отношение между симметричными точками взаимное: *если A' симметрична A, то A симметрична A' относительно того же центра.* Поэтому *отображение, обратное центральной симметрии всего пространства, есть она же сама.*

Из определения симметричных друг другу фигур следует, что центральная симметрия с центром в точке O отображает фигуру на симметричную ей относительно точки O. В частности, то, что фигура имеет центр симметрии O, означает, что центральная симметрия с центром O отображает ее на себя.



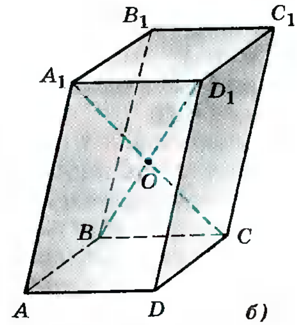


Рис. 252

Основное свойство центральной симметрии содержится в следующей теореме.

Теорема 39.1

Центральная симметрия сохраняет расстояния, а направления изменяет на противоположные. Иначе говоря, любым двум точкам X и Y фигуры F соответствуют такие точки X' и Y', что

$$\overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{XY}. \qquad (39.4)$$

Доказательство. Пусть при центральной симметрии с центром в точке O точки X и Y отобразились на X' и Y'. Тогда, как ясно из определения центральной симметрии (рис. 253),

$$\overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX}, \quad \overrightarrow{OY'} = -\overrightarrow{OY}. \qquad (39.5)$$

Вместе с тем

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}, \quad \overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'}.$$

Поэтому из (39.5) имеем:

$$\overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{XY}. \blacksquare$$

Отображение, сохраняющее расстояния,— это движение. Поэтому доказанное утверждение равносильно следующему:

Центральная симметрия является движением, изменяющим направления на противоположные.

Утверждение, обратное этому свойству, дает признак центральной симметрии.

Теорема 39.2

Движение, изменяющее направления на противоположные, есть центральная симметрия.

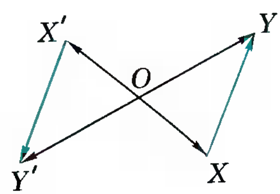


Рис. 253

Доказательство. Пусть φ — движение фигуры F, изменяющее направления на противоположные. Возьмем некоторую точку $A \in F$, и пусть $A' = \varphi(A)$, а точка O —

середина отрезка AA' (если $A=A'$, то $O=A$). По условию теоремы для любой точки $X \in F$ и ее образа

$$X'=\varphi(X)$$

выполняется равенство

$$\overrightarrow{X'A'}=-\overrightarrow{XA} \qquad (39.6)$$

(рис. 254). Из (39.6) следует, что середины отрезков AA' и XX' совпадают (рассмотрите два случая, когда точки A, A', X, X' не лежат на одной прямой и когда они лежат на одной прямой). Поэтому пары точек A, A' и X, X' симметричны относительно одной и той же точки O. Следовательно, φ — симметрия относительно точки O. ■

Центральная симметрия фигуры задается указанием одной пары соответствующих точек: если точка A отображается на A', то центр симметрии — это середина отрезка AA'.

Центральная симметрия любой фигуры естественно распространяется на все пространство: каждой точке сопоставляется симметричная ей относительно того же центра.

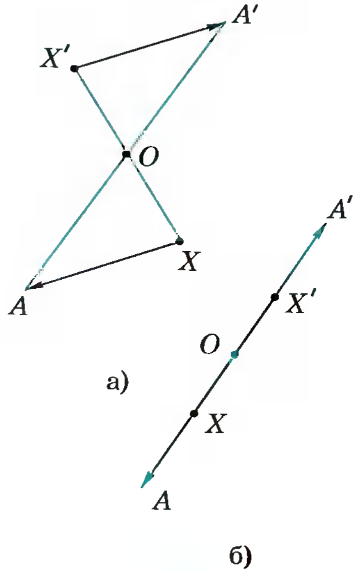


Рис. 254

39.3. Отражение в плоскости (зеркальная симметрия)

Определение

Точки A и A' называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок AA' перпендикулярен этой плоскости и делится ею пополам. Любая точка плоскости α считается симметричной самой себе относительно этой плоскости (рис. 255).

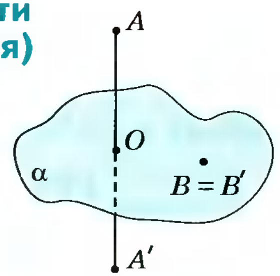


Рис. 255

Две фигуры F и F' называются **симметричными относительно данной плоскости,** если они состоят из точек, попарно симметричных относительно этой плоскости, т. е. если для каждой точки одной фигуры есть симметричная ей точка в другой фигуре.

Возможно, что $F'=F$, т. е. фигуры F и F' — это одна фигура. В этом случае говорят, что **фигура симметрична относительно данной плоскости** и что **эта плоскость является ее плоскостью симметрии** (рис. 256).

Симметричные тела встречаются повсюду: чайники, чашки, ложки, автомобили, дома, корабли, тела животных (хотя их внутреннее строение не вполне симметрично).

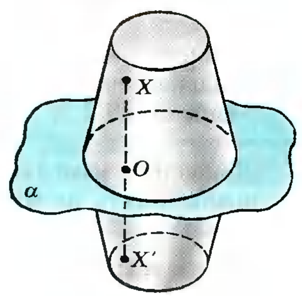


Рис. 256

Определение

Отображение фигуры, при котором каждой ее точке соответствует точка, симметричная ей относительно данной плоскости, называется отражением фигуры в этой плоскости (или симметрией относительно этой плоскости).

Отношение между симметричными точками, как и в случае центральной симметрии, взаимно: *если A' симметрична A относительно плоскости α, то A симметрична A' относительно той же плоскости α. Поэтому отображение, обратное отражению в плоскости всего пространства, есть оно само.*

Ясно, что *при отражении в плоскости фигура отображается на симметричную ей фигуру* относительно этой плоскости.

Теорема 39.3

Отражение в плоскости сохраняет расстояния и, стало быть, является движением.

Доказательство. Пусть дана плоскость α. Возьмем любые две точки A и B и построим симметричные им относительно плоскости α точки A' и B' (рис. 257). Покажем, что $AB=A'B'$.

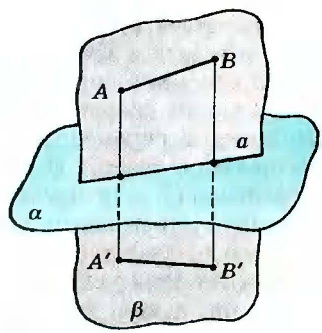


Рис. 257

Если точки A и B не лежат в плоскости α, то оба отрезка AA' и BB' перпендикулярны плоскости α и делятся ею пополам. Поэтому прямые AA' и BB' либо параллельны, либо совпадают. В обоих случаях оба отрезка AA' и BB' лежат в одной плоскости β, причем $\beta\perp\alpha$.

А так как отрезки AA' и BB' перпендикулярны прямой $a=\alpha\cap\beta$ и делятся ею пополам, то точки A и A', а также B и B' симметричны в плоскости β относительно этой прямой. Но мы знаем, что осевая симметрия в плоскости является движением, значит, $A'B'=AB$.

Доказательство для случая, когда хоть одна из точек A, B лежит в плоскости α, лишь упрощается. Проведите его самостоятельно. ■

При отражении в плоскости все точки ее неподвижны, т. е. отображаются сами на себя. Это свойство характеризует отражение среди нетождественных движений пространства, как показывает следующая теорема.

Теорема 39.4

Движение, при котором все точки некоторой плоскости неподвижны, является отражением в этой плоскости или тождественным отображением.

Доказательство. Пусть при движении все точки плоскости α неподвижны. Тогда из сохранения углов и расстояний следует, что прямые, перпендикулярные α, отображаются на себя. При этом либо все точки отражаются в α, либо все точки неподвижны. ■

Отражение в плоскости задается указанием одной пары соответствующих точек, не лежащих в плоскости симметрии: плоскость симметрии проходит через середину отрезка, соединяющего эти точки, перпендикулярно к нему.

39.4. Поворот вокруг прямой

Вы открываете дверь и входите в комнату. Дверь совершает поворот в пространстве. Любой вращающийся предмет, например пропеллер, вал турбины, ворот колодца (рис. 258) и т. п., также дает представление о повороте в пространстве.

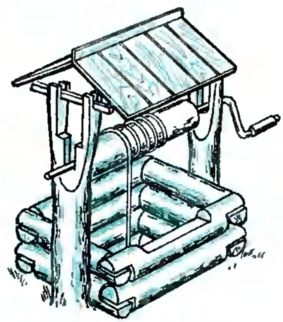


Рис. 258

Прежде чем дать определение поворота в пространстве, напомним, что в результате поворота фигуры F в плоскости вокруг точки O на угол φ (рис. 259) все ее точки X перемещаются так, что отрезки OX поворачиваются на угол φ вокруг O в одном и том же направлении (т. е. по часовой стрелке или против часовой стрелки). Это означает, что каждая точка $X \in F$ переходит в такую точку Y плоскости, что $|OX|=|OY|$, а $\angle XOY=\varphi$ (учитывая знак угла φ). Точка O называется центром поворота, а угол φ — углом поворота.

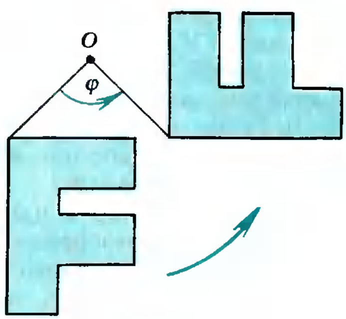


Рис. 259

Перейдем теперь к определению поворота в пространстве.

Определение

Поворотом фигуры вокруг прямой a на угол φ называется такое отображение, при котором в каждой плоскости, перпендикулярной прямой a, происходит поворот вокруг точки ее пересечения с прямой a на один и тот же угол φ в одном и том же направлении (рис. 260). Прямая a называется осью поворота, а угол φ — углом поворота.

Уточнение 1. Поскольку имеется в виду поворот какой-либо фигуры F, то поворот во всякой плоскости α, перпендикулярной оси, относится к пересечению ее с фигурой. Поэтому если плоскость α не имеет общих точек с фигурой F, то о повороте в этой плоскости нет речи.

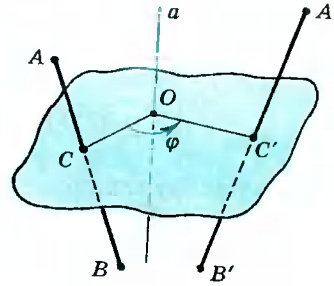


Рис. 260

Уточнение 2. Что значит, что поворот в плоскостях, перпендикулярных оси, происходит на один и тот же угол, можно уточнить следующим образом. Пусть через две какие-нибудь точки A и B, не лежащие на оси, проходят полуплоскости α и β, ограниченные осью a (рис. 261). При повороте вокруг a точки A и B переходят в точки A' и B'. Через них проходят полуплоскости α' и β'. Говоря, что поворот происходит на один и тот же угол φ, мы имеем в виду, что двугранные углы между α и α', между β и β' равны углу поворота φ: $\angle\alpha\alpha'=\angle\beta\beta'=\varphi$. Полуплоскости поворачиваются в одном и том же направлении на один и тот же угол ($\angle\alpha\alpha'=\varphi$).

(Кроме того, напомним, что при повороте вокруг оси, как он был определен, каждая точка A переходит в точку A', лежащую в той же плоскости, перпендикулярной оси a.)

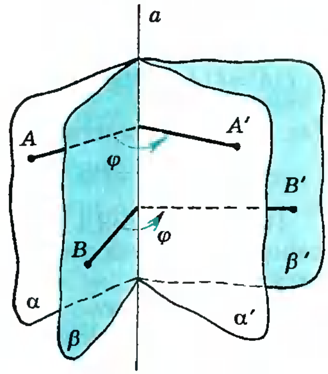


Рис. 261

Уточнение 3. Поворот задается осью, углом и направлением поворота. При этом поворот вокруг прямой задается соответствующим поворотом в какой-нибудь плоскости, перпендикулярной этой прямой. Поэтому направление поворота вокруг прямой можно задать на любой из плоскостей, перпендикулярных оси, так же как это делается в планиметрии. Тем самым оно будет определено для полуплоскостей, ограниченных осью.

Так же как и в планиметрии, удобно считать угол в одном направлении положительным, а в другом отрицательным. Тогда специально направление поворота задавать не нужно: оно уже определено знаком угла поворота.

Теорема 39.5

Поворот вокруг прямой сохраняет расстояния, т. е. является движением.

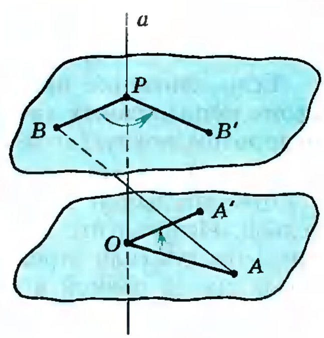


Рис. 262

Доказательство. Пусть при повороте вокруг оси a точки A и B перешли в точки A' и B'. Опустим перпендикуляры AO и BP из точек A и B на ось a (рис. 262). Тогда можно написать векторное равенство

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}. \qquad (39.7)$$

Так как $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{OP}$, то, возводя (39.7) в квадрат, получим:

$$AB^2 = AO^2 + PB^2 + OP^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{PB}. \qquad (39.8)$$

Угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{PB}$ равен двугранному углу δ между полуплоскостями α и β, ограниченными осью a и проходящими через точки A и B. Поэтому

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PB} = -OA \cdot PB \cos\delta. \qquad (39.9)$$

Следовательно,

$$AB^2 = OA^2 + PB^2 - 2OA \cdot PB \cos\delta + OP^2. \qquad (39.10)$$

При повороте ни расстояния от оси, ни угол δ не изменяются. Поэтому

$$OA' = OA, \ PB' = PB, \ \angle \overrightarrow{AO}, \ \overrightarrow{PB} = \angle \overrightarrow{OA'}, \ \overrightarrow{PB'}. \qquad (39.11)$$

Так же как равенство (39.10), получаем равенство

$$A'B'^2 = OA'^2 + PB'^2 - 2OA' \cdot PB' \cos\delta + OP^2. \qquad (39.12)$$

Из (39.10), (39.11), (39.12) следует, что $A'B' = AB$, т. е. расстояния при повороте вокруг прямой сохраняются. ■

Поворот можно со всякой фигуры распространить на все пространство, перемещая все его точки так, как сказано в определении поворота.

При повороте пространства вокруг прямой — оси — на ненулевой угол все точки оси неподвижны, но все остальные точки пространства перемещаются. Это свойство выделяет повороты среди всех движений пространства. А именно имеет место следующая теорема:

Теорема 39.6

Если движение пространства имеет множеством своих неподвижных точек прямую, то оно является поворотом вокруг этой прямой.

Доказательство этой теоремы проведите самостоятельно. Используйте в доказательстве то обстоятельство, что луч (или отрезок) с началом в какой-нибудь точке данной прямой и перпендикулярный ей поворачивается в плоскости перпендикуляров к этой прямой в данной точке, так как движение сохраняет углы.

39.5. Осевая симметрия в пространстве

Частным случаем поворота вокруг прямой является поворот на 180°. При повороте вокруг прямой a на 180° каждая точка A, не лежащая на оси поворота a, переходит в такую точку A', что прямая a перпендикулярна отрезку AA' и пересекает его в середине (рис. 263). Про такие точки A и A' говорят (как и в планиметрии), что они симметричны относительно прямой a. Поэтому поворот на 180° вокруг прямой является также симметрией относительно этой прямой. (Вспомните, что в планиметрии *поворот на 180° является центральной симметрией*.)

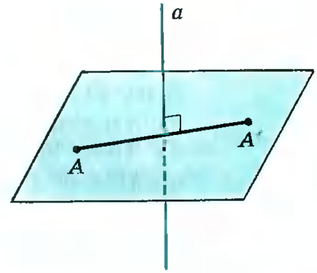


Рис. 263

Задачи

Разбираемся в решении

39.1.(1). Пусть f — движение, а g — перенос. Докажите, что $f^{-1}\circ g\circ f$ — перенос.

Решение

Попробуем доказать, что для движения $f^{-1}\circ g\circ f$ выполняется признак параллельного переноса, т. е. что оно сохраняет направления. Возьмем любой вектор $\vec{a}$ и найдем его образ $f^{-1}\circ g\circ f(\vec{a})$. Так как g — перенос, то он переводит любой вектор в тот же вектор, т. е., в частности, $g(f(\vec{a}))=f(\vec{a})$. Но тогда $f^{-1}\circ g\circ f(\vec{a})=f^{-1}(f(\vec{a}))=\vec{a}$, т. е. движение $f^{-1}\circ g\circ f$ сохраняет направления. Поэтому оно является параллельным переносом. ■

39.2.(2). Докажите, что центральная симметричность цилиндра равносильна центральной симметричности его основания. (Здесь речь идет о цилиндре общего вида.)

Решение

Пусть Z — цилиндр, имеющий центр симметрии — точку O, а Q и Q' — его основания (рис. 264). Пусть Q лежит в плоскости α, а Q' — в плоскости α'. Проведем через O образующую цилиндра. Она пересечет плоскость α в точке A, а плоскость α' в точке A'. Точка O является серединой отрезка AA' (?). Покажем, что A — центр симметрии основания Q, а точка A' — центр симметрии основания Q'. Возьмем любую точку $X\in Q$, и пусть Y' — симметричная ей точка (относительно точки O). Ясно, что $Y'\in Q'$. Точка Y' является одним из концов образующей YY' цилиндра Z. Так как $XO=OY'$ и $OA\parallel YY'$, то $XA=AY$. Поэтому точка Y симметрична точке X относительно точки A. Итак, A — центр сим-

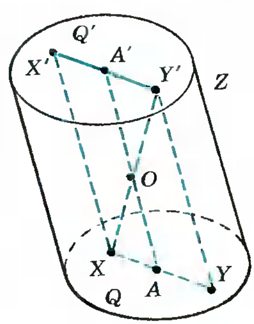


Рис. 264

метрии основания Q. Точно так же A' — центр симметрии основания Q'.

Пусть теперь, наоборот, дано, что цилиндр Z имеет основание, симметричное относительно некоторой точки A. Тогда строим образующую AA' и берем точку O — середину этого отрезка. Возьмем затем любую точку $M \in Z$ и проведем через нее образующую XX' (рис. 265). Точка Y, симметричная точке X относительно точки A, будет точкой основания Q. Идущая из Y образующая YY' цилиндра Z пересечет прямую OM в точке $M' \in Z$, симметричной точке M относительно точки O. Итак, O — центр симметрии цилиндра Z.

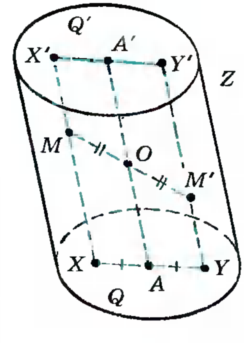


Рис. 265

Доказываем

39.3.(3). Две сферы S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 имеют общую окружность C. Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна плоскости α, в которой лежит эта окружность.

Решение

Конечно, эту задачу нетрудно решить и без применения симметрий. Но можно предложить и такое решение. Проведем через прямую O_1O_2 любую плоскость β, и пусть σ_β — отражение в плоскости β. Тогда, очевидно, $\sigma_\beta(S_1)=S_1$ и $\sigma_\beta(S_2)=S_2$, а потому $\sigma_\beta(C)=\sigma_\beta(S_1 \cap S_2)=$ $=\sigma_\beta(S_1) \cap \sigma_\beta(S_2)=S_1 \cap S_2=C$. Итак, отражение σ_β переводит C в C, а тогда σ_β переводит и плоскость α, в которой лежит C, в ту же плоскость α (?). Но это возможно лишь тогда, когда $\beta \perp \alpha$. Итак, любая плоскость β, проходящая через прямую O_1O_2, перпендикулярна плоскости α. Но это возможно лишь тогда, когда $(O_1O_2) \perp \alpha$ (?).

39.4.(4). Куб повернули на 60° относительно его диагонали. Найдите пересечение и объединение исходного и полученного кубов.

Решение

Прежде всего вспомним, что в кубе есть сечение плоскостью, являющееся правильным шестиугольником (задача 9.1) и перпендикулярное диагонали куба. Если в кубе $J=ABCDA_1B_1C_1D_1$ взять диагональ AC_1, то такое сечение можно получить, если провести через середину этой диагонали — точку O — плоскость $\alpha \perp (AC_1)$ (рис. 84). В сечении получим правильный шестиугольник $KLMNPQ=T$, причем точка K — середина ребра DD_1, точка L — середина ребра D_1A_1 и т. д. При повороте v куба J вокруг (AC_1) на 60° шестиугольник T перейдет в себя. Будем считать, что точка K перешла в точку L, точка L — в точку M и т. д. Так как вершины A и C_1 лежат на оси поворота, то $v(A)=A$ и $v(C_1)=C_1$. Поэтому отрезки AK, AL и т. д. перейдут соответственно в отрезки AL, AM и т. д. Поскольку отрезки AK и AL лежат в грани AA_1D_1D, то плоскость этой грани после поворота v перейдет в плоскость ALM, а образ этой грани — квадрат $v(AA_1D_1D)$ — отсечет от куба J тетраэдр AA_1LM. Кроме того, от куба J повернутый куб $v(J)$ отсечет еще два тетраэдра с вершиной A — $ABNP$ и $ADQK$, а также три тетраэдра с вершиной C_1 (назовите их). Следовательно, общая часть куба J и куба $v(J)$ состоит из двух шестиугольных пирамид с вершинами A и C_1 и общим основанием $KLMNPQ$. ■

Дополняем теорию

39.5.(1). Докажите, что в результате переноса плоскость переходит в параллельную ей плоскость (если вектор переноса не параллелен данной плоскости). Верно ли обратное утверждение?

39.6.(2). Докажите, что плоскость полученная из данной плоскости центральной симметрией, параллельна данной или совпадает с ней.

39.7.(3). Ограниченная фигура имеет центр симметрии и плоскость симметрии. Докажите, что центр симметрии фигуры лежит в плоскости ее симметрии.

39.8.(3). Докажите, что композиция двух отражений в параллельных плоскостях является переносом. Коммутативна ли эта композиция? Данный перенос разложите в композицию двух отражений в плоскости.

39.9.(4). Докажите, что композиция двух отражений в пересекающихся плоскостях является поворотом. Коммутативна ли такая композиция? Данный поворот разложите на композицию двух отражений в плоскости.

Рисуем

39.10.(1). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. Перенос задается вектором: а) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AO}$, где точка O — центр нижнего основания. Нарисуйте образ призмы при этом переносе. Нарисуйте объединение исходной и полученной призм.

39.11.(2). Дан правильный тетраэдр. Нарисуйте тетраэдр, который получается из данного центральной симметрией относительно середины высоты. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного тетраэдров.

39.12.(3). Дан правильный тетраэдр. Плоскость проведена перпендикулярно его высоте через ее середину. Нарисуйте тетраэдр, симметричный данному относительно этой плоскости. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного тетраэдров.

39.13.(3). Нарисуйте многогранник, имеющий центр симметрии и: а) одну плоскость симметрии; б) две плоскости симметрии; в) три плоскости симметрии.

39.14.(3). Нарисуйте ограниченное невыпуклое тело, которое имеет бесконечное множество плоскостей симметрии.

39.15.(3). Тело задано тремя проекциями (рис. 266). Нарисуйте три проекции тела, симметричного данному относительно горизонтальной плоскости проекций.

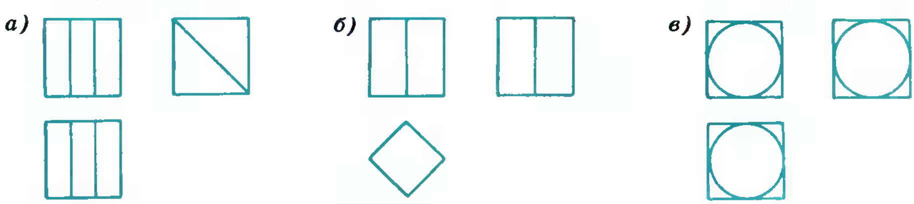


Рис. 266 *а*, *б*, *в*

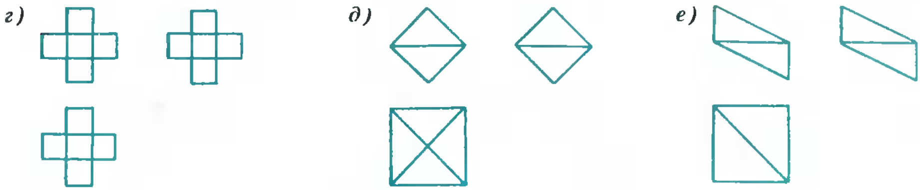


Рис. 266 *г, д, е*

39.16.(4). Правильный тетраэдр повернули вокруг высоты на 60°. Нарисуйте его образ в этом повороте. Нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного тетраэдров.

39.17.(4). Нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного многогранников, если: а) куб повернули на 90° вокруг прямой, соединяющей середины параллельных ребер, не лежащих в одной грани; б) правильный тетраэдр повернули на 90° вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер.

39.18.(4). Нарисуйте фигуру вращения, полученную в результате вращения отрезка вокруг оси: а) перпендикулярной к нему и проходящей через один из его концов; б) пересекающей его в одном из его концов и не перпендикулярной к нему; в) пересекающей его во внутренней точке; г) параллельной ему; д) скрещивающейся с ним.

39.19.(4). Равносторонний треугольник вращается вокруг: а) высоты; б) стороны; в) прямой, параллельной высоте и проходящей: 1) через его вершину, 2) вне треугольника, 3) внутри треугольника. Нарисуйте в каждом случае получившееся тело вращения. Является ли оно известным для вас телом или какой-нибудь их комбинацией?

39.20.(4). Квадрат вращается вокруг: а) стороны; б) средней линии; в) прямой, параллельной стороне и проходящей: 1) вне квадрата, 2) внутри его; г) прямой, параллельной диагонали и проходящей через вершину. Нарисуйте в каждом случае полученное тело вращения. Является ли оно телом, известным вам, или их комбинацией?

39.21.(4). Прямоугольник вращается вокруг: а) диагонали; б) прямой, параллельной диагонали и проходящей: 1) через его вершину, 2) вне его. Нарисуйте полученное при этом тело вращения. Комбинацией каких известных вам тел оно является?

39.22.(4). Ромб вращается вокруг: а) стороны; б) прямой, перпендикулярной стороне и проходящей: 1) через его вершину, 2) вне его; в) прямой, перпендикулярной его диагонали и проходящей: 1) через его вершину, 2) вне его, 3) внутри его. Нарисуйте полученное тело вращения. Комбинацией каких известных вам тел оно является?

39.23.(4). Трапеция: а) прямоугольная; б) равнобедренная — вращается вокруг каждой из своих сторон. Нарисуйте полученное тело вращения. Комбинацией каких известных вам тел оно является?

39.24.(4). Сектор круга с центром O и хордой AB вращается вокруг: а) крайнего радиуса; б) среднего радиуса; в) диаметра, параллельного (AB); г) диаметра, не параллельного (AB). В каждом случае нарисуйте полученное тело вращения. Комбинацией каких известных вам тел оно является?

39.25.(4). Сегмент круга с хордой AB вращается вокруг: а) (AB); б) диаметра, перпендикулярного (AB); в) диаметра, параллельного (AB); г) опорной прямой сегмента, параллельной (AB). Нарисуйте полученное тело вращения. Комбинацией каких известных вам тел оно является?

39.26.(4). Нарисуйте тело, полученное при вращении куба вокруг: а) ребра; б) диагонали.

39.27.(4). Нарисуйте тело, полученное при вращении: а) правильного тетраэдра вокруг ребра; б) конуса вокруг прямой, параллельной оси и проходящей вне его.

39.28.(4). Нарисуйте два тела, которые можно совместить центральной симметрией, отражением в плоскости, но нельзя совместить переносом. Решите аналогичную задачу для другой комбинации этих движений.

Представляем

39.29.(1). Найдутся ли два равных круговых сечения у двух неравных конусов, если: а) они стоят на одной плоскости по одну сторону от нее; б) их оси лежат на одной прямой?

39.30.(1). Сохраняет ли перенос ориентацию базиса пространства?

39.31.(1). Имеет ли перенос неподвижные точки? Есть ли прямые (плоскости), которые в результате переноса отображаются на себя?

39.32.(1). Можно ли равными параллелепипедами заполнить все пространство? (Общей частью этих параллелепипедов могут быть только грани или их части.)

39.33.(2). Две окружности центрально-симметричны и не лежат в одной плоскости. Верно ли, что они: а) принадлежат поверхности одного шара; б) принадлежат поверхности одного цилиндра?

39.34.(2). Может ли центр симметрии тела не принадлежать ему?

39.35.(2). Сохраняет ли центральная симметрия ориентацию базиса пространства?

39.36.(2). Какие прямые (плоскости) отображаются на себя в результате центральной симметрии пространства?

39.37.(2). Каждое из двух тел центрально-симметрично. Будет ли центрально-симметрично их: а) объединение; б) пересечение?

39.38.(2). Центрально-симметричное тело разделили плоскостью. Одна его часть оказалась центрально-симметричной. Будет ли и другая его часть центрально-симметричной? Составьте и решите обратную задачу.

39.39.(3). Два равных отрезка: а) параллельны; б) имеют ровно одну общую точку; в) не имеют общих точек. Будут ли они симметричны относительно какой-либо плоскости?

39.40.(3). Два отрезка симметричны друг другу относительно двух плоскостей. Какая получится фигура, если концы их последовательно соединить?

39.41.(3). Через прямую a проведены всевозможные плоскости. Точка A не лежит на прямой a. Какую фигуру образуют все точки, полученные из A при отражении в этих плоскостях?

39.42.(3). Вектор $\vec{b}$ получен из вектора $\vec{a}$ отражением в плоскости α. Как расположен по отношению к этой плоскости вектор: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$?

39.43.(3). Существует ли многогранник, имеющий любое наперед заданное число плоскостей симметрии?

39.44.(3). а) Верно ли, что наклонный параллелепипед, две грани которого перпендикулярны основанию, имеет плоскость симметрии? б) Проверьте утверждение: «Если параллелепипед имеет плоскость симметрии, то среди его граней есть прямоугольники».

39.45.(3). Сколько плоскостей симметрии должен иметь параллелепипед, чтобы быть прямоугольным?

39.46.(3). Верно ли, что две окружности, симметричные относительно плоскости, принадлежат одной сфере?

39.47.(3). Могут ли два тела быть симметричными относительно двух различных плоскостей?

39.48.(3). Сохраняет ли зеркальная симметрия ориентацию базиса пространства?

39.49.(3). Какие прямые (плоскости) отображаются на себя зеркальной симметрией пространства?

39.50.(3). Какие плоскости симметрии имеет: а) куб, у которого окрасили одним цветом две грани, три грани[1]; б) многогранник, являющийся объединением двух равных кубов (решите аналогичную задачу для прямоугольных параллелепипедов); в) многогранник, составленный из двух равных треугольных призм с общей гранью; г) тетраэдр; д) многогранник, составленный из двух равных прямоугольных тетраэдров с общей гранью; е) многогранник, составленный из двух равных правильных четырехугольных пирамид; ж) объединение двух шаров?

39.51.(3). Две фигуры F_1 и F_2 симметричны относительно плоскости α, в результате переноса (центральной симметрии) плоскость α перешла в плоскость β. Как расположены образы фигур F_1 и F_2 в результате этого движения относительно плоскости β?

39.52.(4). Даны две точки. а) При каком повороте одна из них отображается на другую? б) При каком повороте каждая из них отображается на другую? в) Какую фигуру образуют оси всех искомых поворотов в этих случаях?

39.53.(4). Какими поворотами шар можно отобразить на себя? А если из шара выколоть одну точку? две точки? три точки?

39.54.(4). Даны две фигуры. Установите, при каком повороте одна из них отображается на другую, если это: а) два равных отрезка; б) две прямые; в) две плоскости; г) два равных шара. Найдется ли такой поворот, при котором и вторая из них отображается на первую?

39.55.(4). Изменит ли поворот ориентацию базиса пространства?

39.56.(4). Для данного поворота найдите прямые (плоскости), которые отображаются на себя.

39.57.(4). В кубе закрасили две грани. В результате некоторого поворота куб перешел в себя, а закрашенные грани — в закрашенные. а) Может ли при таком повороте одна из них оказаться на месте другой? б) Может ли при таком повороте и вторая грань оказаться на месте первой?

39.58.(4). Как расположены в ограниченном теле ось поворотной симметрии и: а) центр симметрии; б) плоскость отражения; в) центр наибольшего шара, содержащегося в нем; г) центр наименьшего шара, содержащего его; д) диаметр?

---

[1] В дальнейшем, говоря, что многогранник с закрашенными гранями перешел в себя, будем всегда иметь в виду, что закрашенные грани перешли в закрашенные.

39.59.(4). Какие тела можно получить, вращая круг?

39.60.(4). Всегда ли, вращая выпуклую плоскую фигуру, мы получим выпуклое тело? А в каком случае получим?

39.61.(4). Сколько осей симметрии имеют: а) прямая; б) две прямые; в) куб; г) правильный тетраэдр; д) правильный октаэдр; е) правильный икосаэдр; ж) правильный додекаэдр?

Планируем

39.62.(1). На двух основаниях правильной треугольной призмы с равными ребрами во внешнюю сторону построены два правильных тетраэдра. Возьмите по одному ребру каждого из них. Как вы найдете угол между ними? Составьте задачи, похожие на эту.

39.63.(4). Как вы будете искать объем тела вращения в задачах 39.18—39.27, 39.59?

39.64.(4). Как вы будете искать площадь поверхности вращения тел в задачах 39.18—39.27?

Находим величину

39.65.(1). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка O — центр грани $ABCD$. Вычислите угол φ между: а) (B_1O) и (CC_1); б) (B_1O) и (CD_1); в) (CC_1D) и (B_1O); г) (B_1O) и (A_1C_1D).

39.66.(1). $PABCD$ — пирамида, в основании которой лежит ромб. $(PB)\perp(ABC)$. Площадь грани PBC равна S. Через середину ребра AD проводится сечение, параллельное (PAB). Какова его площадь?

39.67.(1). В правильной четырехугольной усеченной пирамиде противоположные грани перпендикулярны. Разность ребер ее оснований равна 1. Вычислите высоту этой усеченной пирамиды.

39.68.(1). Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция. $AB=BC=CD=2$, $AD=4$, $(ABK)\perp(ABC)$, $(CLD)\perp(ABC)$, треугольники AKB и CLD равносторонние и лежат по одну сторону от плоскости трапеции. Вычислите объем многогранника $ABCDKL$.

39.69.(1). В прямой четырехугольной призме основанием является трапеция. Площади ее боковых граней 1, 2, 3, 4. Расстояние между параллельными гранями с площадями 1 и 4 равно 1. Вычислите объем призмы.

39.70.(4). Дан правильный тетраэдр. Все боковые грани его повернули вокруг ребер основания на один и тот же угол во внешнюю сторону. При этом получился многогранник с шестью вершинами и равными ребрами. На какой угол повернули грани?

39.71.(4). На плоское зеркало под углом 45° падает луч света. Зеркало повернули вокруг проекции луча света на зеркало на угол 45°. На какой угол отклонился луч света?

39.72.(4). Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма. В каком отношении делит объем призмы сечение AKB_1, где K — середина ребра CC_1?

39.73.(4). Правильный тетраэдр повернули вокруг оси симметрии на угол 90°. Объем тетраэдра равен V. Чему равен объем общей части исходного и полученного тетраэдров? Решите задачу в общем случае.

Доказываем

39.74.(1). Используя свойства переноса, докажите, что: а) два перпендикуляра к одной плоскости параллельны; б) две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны; в) если прямая параллельна прямой, перпендикулярной плоскости, то она тоже перпендикулярна этой плоскости; г) линейные углы двугранного угла равны между собой.

39.75.(1). Докажите, что если есть два равных шара, то один из них можно получить переносом другого. Верно ли это для равных цилиндров? для равных конусов?

39.76.(2). а) Даны два равных шара. Докажите, что они центрально-симметричны. б) В каком случае центрально-симметричны два равных цилиндра? в) В каком случае центрально-симметричны два равных конуса?

39.77.(2). Два равных шара касаются. Через их общую точку проведена плоскость, пересекающая каждый шар по кругу. Докажите, что эти круги равны.

39.78.(2). Докажите, что объединение двух плоскостей является центрально-симметричной фигурой.

39.79.(2). Пусть f — некоторое движение, а g — центральная симметрия. Докажите, что $f^{-1}\circ g\circ f$ является центральной симметрией.

39.80.(3). В правильном тетраэдре $PABC$ на его ребрах отложены равные отрезки PK и PL (точка K на ребре PA, точка L на ребре PC), а также CM и CN (точка M на ребре AC, точка N на ребре CB). Докажите, что $ML=KN$.

39.81.(3). Прямая b получена из прямой a отражением в плоскости α. Эти прямые имеют общую точку. Докажите, что эта точка лежит в плоскости α.

39.82.(3). Центр куба отражается в плоскости каждой его грани. Докажите, что полученные точки являются вершинами правильного октаэдра. Принадлежит ли данный куб этому октаэдру?

39.83.(3). Дан правильный тетраэдр $PABC$. Каждая его вершина отражается в плоскости противоположной грани. Докажите, что полученные точки A_1, B_1, C_1, P_1 являются вершинами правильного тетраэдра. Нарисуйте многогранник, являющийся объединением и пересечением исходного и полученного тетраэдров.

39.84.(3). Пусть f — движение, а g — отражение в плоскости. Докажите, что $f^{-1}\circ g\circ f$ является отражением в плоскости.

39.85.(4). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Докажите, что $(AB_1D_1)\perp(A_1C)$.

39.86.(4). Плоская фигура имеет центр симметрии. Докажите, что она имеет пространственную ось симметрии. Верно ли обратное?

39.87.(4). Через биссектрису угла проведена плоскость. Докажите, что стороны угла образуют с ней одинаковые углы.

39.88.(4). Фигура F имеет две пересекающиеся перпендикулярные оси симметрии. Докажите, что она имеет еще одну ось симметрии, перпендикулярную данным.

39.89.(4). Фигура F имеет две оси симметрии a и b. Пусть прямая c является образом a в результате осевой симметрии с осью b. Докажите, что c также ось симметрии фигуры F.

Исследуем

39.90.(1). Пусть f — отображение пространства на себя и $f(\vec{a})=\vec{a}$ для всякого вектора $\vec{a}$. Верно ли, что f — перенос?

39.91.(2). Может ли ограниченное тело иметь больше одного центра симметрии?

39.92.(2—4). Тело задано тремя ортогональными проекциями (рис. 266). Имеет ли такое тело центр симметрии? плоскость симметрии? ось симметрии?

39.93.(2). Тело имеет центр симметрии. а) Докажите, что центр симметрии лежит на диаметре тела. б) Верно ли, что с ним совпадает центр наибольшего шара, принадлежащего телу? центр наименьшего шара, содержащего тело?

39.94.(2). Будет ли сечение центрально-симметричного тела, проходящее через его центр симметрии, центрально-симметричным? Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

39.95.(2). Тело центрально-симметрично. 1) Будет ли центрально-симметрична его ортогональная проекция на: а) какую-либо плоскость; б) на любую плоскость? 2) Сформулируйте и проверьте обратные утверждения.

39.96.(3). Как расположен диаметр тела по отношению к плоскости его симметрии?

39.97.(3). Тело имеет плоскость симметрии. Верно ли, что центр: а) наименьшего шара, содержащего тело, лежит в этой плоскости; б) наибольшего шара, принадлежащего телу, лежит в этой плоскости?

39.98.(4). Пусть f — движение, g — поворот. Каким движением является $f^{-1}\circ g\circ f$?

39.99.(4). Пусть плоскость β является образом плоскости α в результате осевой симметрии с осью l, $\alpha\cap\beta=a$. Верно ли, что $a\perp l$?

39.100.(4). Ограниченная фигура имеет оси симметрии, не лежащие в плоскости. Имеют ли все эти оси общую точку?

39.101.(4). Пусть f — движение, g — осевая симметрия. Каким движением является $f^{-1}\circ g\circ f$?

Прикладная геометрия

39.102.(2—4). Как вы будете действовать, если нужно узнать, имеет ли реальный многогранник: а) центр симметрии; б) плоскость зеркальной симметрии; в) ось поворотной симметрии; г) ось симметрии?

Участвуем в олимпиаде

39.103.(2). Каждая грань выпуклого многогранника центрально-симметрична. Докажите, что этот выпуклый многогранник центрально-симметричен.

39.104.(3). Ограниченное тело имеет несколько плоскостей симметрии. Докажите, что все эти плоскости имеют общую точку.

39.105.(4). Докажите, что если ограниченное выпуклое тело имеет две оси вращения, то оно является шаром.

Рассуждаем

39.106.(1). Некоторое тело перешло в себя в результате нетождественного переноса. Докажите, что оно не является ограниченным.

39.107.(4). В шаре радиусом R провели через центр две плоскости, образующие между собой угол φ. На какие по объему части они разбили шар?

§ 40. Теоремы о задании движений пространства

Рассматривая частные виды движений, мы отмечали, сколько пар соответствующих точек надо задать, чтобы определить то или иное движение. В этом параграфе мы решим этот вопрос для общих движений. Затем эти теоремы помогут нам решить вопрос о классификации движений пространства.

40.1. Неподвижные точки движений пространства

Важной характеристикой движения пространства является множество его неподвижных точек. Оно устроено просто, и могут представиться лишь следующие пять случаев:

1) ***У движения неподвижных точек нет*** (вспомните нетождественный параллельный перенос).

2) ***Движение имеет лишь одну неподвижную точку*** (вспомните центральную симметрию).

3) ***Множество неподвижных точек движения пространства является прямой*** (поворот вокруг прямой).

Больше того, если движение пространства φ имеет две неподвижные точки A и B, то все точки прямой AB неподвижны.

Действительно, так как $\varphi(A)=A$ и $\varphi(B)=B$, то $\varphi((AB))=(AB)$ по свойству 3 (п. 38.4). Поэтому если $X\in(AB)$, то $\varphi(X)\in(AB)$.

Далее, $|\varphi(X)A|=|XA|$ и $|\varphi(X)B|=|XB|$. Поэтому $\varphi(X)=X$.

4) ***Множество неподвижных точек движения пространства является плоскостью*** (отражение в плоскости).

Больше того, если движение пространства φ имеет три неподвижные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, то все точки плоскости ABC неподвижны.

Доказательство этого утверждения аналогично предыдущему. Так как $\varphi(A)=A$, $\varphi(B)=B$ и $\varphi(C)=C$, то $\varphi((ABC))=(ABC)$. Поэтому если $X\in(ABC)$, то $\varphi(X)\in(ABC)$ (по свойству 4, п. 38.4). Далее, $|\varphi(X)A|=$ $=|XA|$, $|\varphi(X)B|=|XB|$, $|\varphi(X)C|=|XC|$. Поэтому $\varphi(X)=$ $=X$ (рис. 267). (Любые два из этих трех равенств, вообще говоря, определяют два возможных положения точки $\varphi(X)$ в плоскости (ABC) как точки пересечения

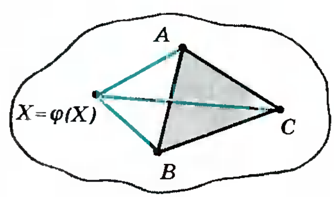


Рис. 267

двух окружностей. Третье равенство из этих двух возможных точек выделяет одну — точку X.)

5) Наконец, ***множеством неподвижных точек движения пространства может быть все пространство*** (тождественное движение).

Так будет в том случае, когда движение имеет четыре неподвижные точки, не лежащие в одной плоскости.

Самостоятельно докажите это утверждение по аналогии с предыдущими двумя. Доказательство основано на том, что три сферы с центрами A, B, C и радиусами $|XA|$, $|XB|$, $|XC|$ соответственно пересекаются, вообще говоря, в двух точках, симметричных относительно плоскости ABC, из которых выделяется одна равенством $|\varphi(X)D|=|XD|$ (рис. 268).

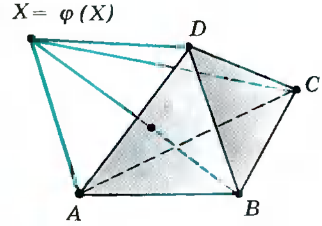


Рис. 268

40.2. Основные теоремы о задании движений пространства

Теорема 40.1

Пусть в пространстве даны два равных треугольника ABC и $A'B'C'$. Тогда существуют два и только два таких движения пространства, которые переводят A в A', B в B' и C в C'. Каждое из этих движений получается из другого с помощью композиции его с отражением в плоскости $A'B'C'$.

Доказательство. Докажем сначала существование искомого движения. Рассмотрим векторы $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AC}$ и выберем один из двух перпендикулярных к плоскости ABC единичных векторов $\vec{e}_3=\overrightarrow{AD}$ (рис. 269). Аналогично введем векторы $\vec{f}_1=\overrightarrow{A'B'}$, $\vec{f}_2=\overrightarrow{A'C'}$ и единичный вектор $\vec{f}_3=\overrightarrow{A'D'}$, перпендикулярный плоскости $A'B'C'$.

Возьмем в пространстве любую точку X и разложим ее радиус-вектор $\overrightarrow{AX}$ по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\overrightarrow{AX}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3.$$

Поставим точке X в соответствие точку X' — конец вектора:

$$\overrightarrow{A'X'}=x\vec{f}_1+y\vec{f}_2+z\vec{f}_3.$$

Очевидно, $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$ и $\varphi(C)=C'$.

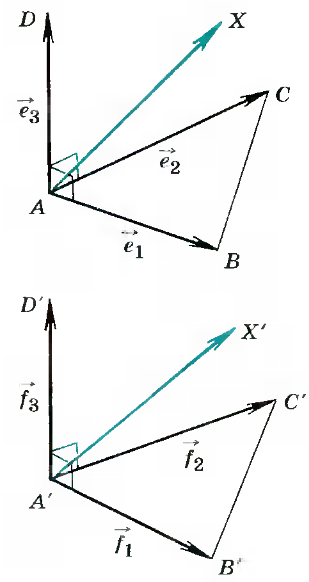


Рис. 269

Построенное отображение φ является искомым движением. Действительно, возьмем любые две точки пространства P и Q.

Пусть

$$\vec{AP}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3 \text{ и } \vec{AQ}=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3.$$

Тогда если $P'=\varphi(P)$ и $Q'=\varphi(Q)$, то

$$\vec{A'P'}=x_1\vec{f}_1+y_1\vec{f}_2+z_1\vec{f}_3 \text{ и } \vec{A'Q'}=x_2\vec{f}_1+y_2\vec{f}_2+z_2\vec{f}_3.$$

Поэтому

$$\vec{PQ}=(x_2-x_1)\,\vec{e}_1+(y_2-y_1)\,\vec{e}_2+(z_2-z_1)\,\vec{e}_3$$

и

$$\vec{P'Q'}=(x_2-x_1)\,\vec{f}_1+(y_2-y_1)\,\vec{f}_2+(z_2-z_1)\,\vec{f}_3.$$

Далее,

$$PQ^2=\vec{PQ}^2=(x_2-x_1)^2\cdot AB^2+(y_2-y_1)^2\cdot AC^2+(z_2-z_1)^2+$$
$$+2\,(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$$

и

$$P'Q'^2=\vec{P'Q'}^2=(x_2-x_1)^2\cdot A'B'^2+(y_2-y_1)^2\cdot A'C'^2+$$
$$+(z_2-z_1)^2+2\,(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cdot A'B'\cdot A'C'\cdot\cos\angle B'A'C'.$$

Так как $AB=A'B'$, $AC=A'C'\angle BAC=\angle B'A'C'$, то

$$PQ=P'Q'.$$

Тогда φ — движение, существование которого утверждает теорема.

Докажем теперь, что таких движений ровно два. Пусть f и g — некоторые движения, удовлетворяющие условиям теоремы.

Рассмотрим обратное движению g отображение g^{-1}. Тогда отображение $f\circ g^{-1}$ имеет точки A', B', C' своими неподвижными точками, так как, например,

$$(f\circ g^{-1})(A')=f\circ(g^{-1}(A'))=f(A)=A'.$$

Поэтому отображение $f\circ g^{-1}$ имеет своими неподвижными точками все точки плоскости $A'B'C'$. Следовательно, по теореме 39.4 $f\circ g^{-1}$ либо тождественное отображение, либо отражение σ в плоскости $A'B'C'$.

В первом случае имеем, что $f=g$, а во втором, что $f=\sigma\circ g$, так как из равенства $f\circ g^{-1}=\sigma$ следует, что $(f\circ g^{-1})\circ g=\sigma\circ g$, т. е. $f=\sigma\circ g$. Поэтому искомых движений ровно два. ■

Итак, задание трех пар соответствующих точек определяет два движения пространства, переводящих первую тройку точек во вторую. Ясно, что если задать четыре пары соответствующих точек — вершин двух равных тетраэдров, то движение определяется однозначно. А именно имеет место следующая теорема:

Теорема 40.2

Пусть в пространстве заданы два равных тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Тогда существует единственное движение пространства φ, такое, что $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$, $\varphi(C)=C'$ и $\varphi(D)=D'$.

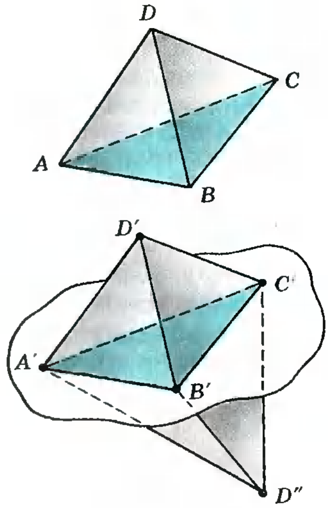


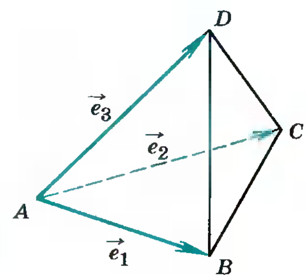
Рис. 270

Доказательство этой теоремы проведите самостоятельно по аналогии с доказательством теоремы 40.1.

Следствием этой теоремы является теорема 38.1 о распространении движения фигуры на пространство: достаточно в фигуре выделить любые четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, и применить теорему 40.2. (Если же таких четырех точек в фигуре нет, то надо взять три (или две) точки и дополнить их до четырех нужных точек точками вне фигуры.)

Замечание. Ясно, что если в пространстве даны тетраэдр $ABCD$ и треугольник $A'B'C'$, равный грани ABC этого тетраэдра, то существуют лишь два тетраэдра с гранью $A'B'C'$, равных тетраэдру $ABCD$, причем эти тетраэдры симметричны друг другу относительно плоскости $A'B'C'$ (рис. 270). Поэтому можно было бы сначала доказать теорему 40.2, а затем, воспользовавшись ею и сказанным в этом замечании, доказать теорему 40.1.

40.3. Два рода движений



Снова возьмем два равных тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$ и рассмотрим два базиса $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_3=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{f}_1=\overrightarrow{A'B'}$, $\vec{f}_2=\overrightarrow{A'C'}$ и $\vec{f}_3=\overrightarrow{A'D'}$ (рис. 271).

Могут представиться две возможности: 1) оба эти базиса имеют одинаковую ориентацию, т. е. тройки векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ либо обе правые, либо обе левые; 2) базисы имеют разную ориентацию.

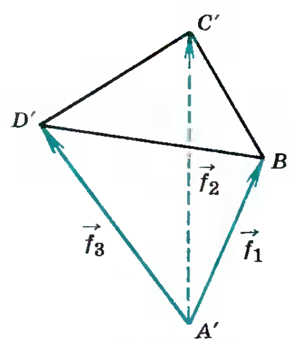


Рис. 271

В первом случае тетраэдр $ABCD$ можно непрерывным движением перевести в тетраэдр $A'B'C'D'$: сначала переносом совместить A с A', затем поворотом совместить AB и $A'B'$ (вокруг прямой, проходящей через A' и перпендикулярной прямым AB и $A'B'$) и, наконец, поворотом вокруг $A'B'$ совместить треугольники ABC и $A'B'C'$ (рис. 272; на нем указаны и промежуточные положения тетраэдра $ABCD$).

Во втором случае такое движение лишь переведет тетраэдр $ABCD$ в тетраэдр $A'B'C'D''$, симметричный тетраэдру $A'B'C'D'$ относительно плоскости $A'B'C'$, и, чтобы завершить совмещение $ABCD$ и $A'B'C'D'$, надо применить отражение в плоскости $A'B'C'$, т. е. непрерывным движением во втором случае $ABCD$ и $A'B'C'D'$ совместить нельзя.

Движения, соответствующие первому случаю, называются **движениями первого рода**, т. е. **движения первого рода — это такие движения, которые сохраняют ориентацию базисов.** *Движения первого рода могут быть реализованы непрерывными движениями.*

Движения, соответствующие второму случаю, называются **движениями второго рода**, т. е. **движения второго рода — это такие движения, которые изменяют ориентацию базисов на противоположную.**

Движения второго рода не могут быть реализованы непрерывными движениями.

Из рассмотренных нами движений *перенос и поворот вокруг прямой являются движениями первого рода, а центральная симметрия и отражение в плоскости — движениями второго рода.* Убедитесь в этом.

Так как движения первого рода — это те движения, которые сохраняют ориентацию базисов, то ***композицией любого числа движений первого рода снова является движение первого рода.***

Напротив, так как движения второго рода — это те движения, которые изменяют ориентацию базисов, то ***композиция четного числа (например, двух) движений второго рода есть движение первого рода, а композиция нечетного числа движений второго рода будет снова движением второго рода.***

Теперь теорему 40.1 можно сформулировать так:

Теорема 40.1, ***а***

Пусть в пространстве даны два равных треугольника ABC и $A'B'C'$. Тогда существует единственное движение пространства первого рода и единственное движение пространства второго рода, которые переводят A в A', B в B' и C в C'. Каждое из этих движений получается из другого с помощью композиции его с отражением в плоскости $A'B'C'$.

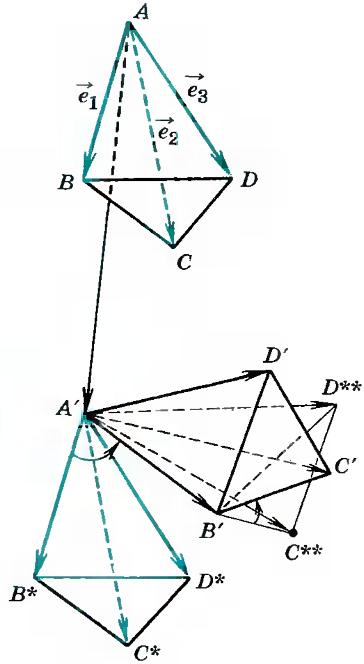


Рис. 272

Задачи

Представляем

40.1. Даны два равных равнобедренных треугольника. Какими движениями их можно совместить, если они имеют общую: а) вершину; б) сторону; в) медиану; г) среднюю линию; д) фиксированную точку внутри, например центроид?

40.2. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Каким движением можно отобразить: а) ребро AA_1 на ребро CC_1; б) ребро AB на ребро DD_1; в) диагональ на другую диагональ; г) отрезок B_1C на отрезок DC_1; д) отрезок, соединяющий середины параллельных ребер, не лежащих в одной грани, на другой такой же; е) треугольник C_1BD на треугольник A_1BD; ж) треугольник C_1BD на треугольник AB_1D_1; з) треугольник C_1BD на треугольник B_1AC; и) треугольник C_1BD на треугольник BC_1A_1; к) сечение AB_1C_1D на сечение DA_1B_1C? Будет ли в таком движении и вторая фигура отображаться на первую?

40.3. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр. Каким движением можно отобразить: а) ребро AD на ребро DC; б) ребро AD на ребро BC; в) одну из его высот на другую; г) отрезок, соединяющий середины противоположных ребер, на другой такой же отрезок; д) сечение одной плоскостью симметрии на такое же; е) сечение, являющееся квадратом, на другое такое же? Будет ли при этом движении и вторая фигура отображаться на первую?

40.4. Возьмите правильный многогранник, а в нем две грани. Каким движением можно одну из них отобразить на другую? Отобразится ли при этом движении и вторая грань на первую? Найдется ли такое движение, при котором каждая из этих граней отображается на другую?

Доказываем

40.5. Даны два ортонормированных базиса пространства. Докажите, что существует движение, переводящее один из них в другой.

Исследуем

40.6. Возьмите композицию любых двух известных вам движений пространства и выясните: а) меняет ли она ориентацию базиса пространства; б) имеет ли она неподвижные точки.

40.7. Имеется фигура F. Фигура F_1 получена из F центральной симметрией, а фигура F_2 получена из F зеркальной симметрией. Центр симметрии лежит в плоскости симметрии. Сможете ли вы получить фигуру F_2 из фигуры F_1 одним из известных вам движений? Составьте аналогичные задачи.

40.8. Пусть движение имеет неподвижные точки, прямые и неподвижную плоскость. Верно ли, что: а) на каждой неподвижной прямой есть неподвижная точка; б) на неподвижной плоскости есть неподвижная точка; в) на неподвижной плоскости есть неподвижная прямая; г) через каждую неподвижную точку проходит неподвижная плоскость; д) все неподвижные прямые лежат в неподвижной плоскости?

Рассуждаем

40.9. Сколько неподвижных точек может иметь движение? Как они расположены? А сколько движение может иметь неподвижных прямых? плоскостей?

40.10. Пусть f — произвольное движение, а g — движение первого рода. Какого рода движением является $f^{-1}\circ g\circ f$? Как изменится результат, если g будет движением второго рода?

§ 41*. Классификация движений

Мы рассмотрели несколько частных видов движений пространства: параллельный перенос, симметрии, поворот вокруг прямой. Они являются самыми важными из движений, так как все остальные движения пространства, как будет доказано в этом параграфе, могут быть представлены в виде композиции двух из этих движений. Среди же перечисленных видов движений особую роль играют отражения в плоскости, потому что любое движение пространства может быть представлено композицией не более чем четырех отражений в плоскости. Поэтому мы и начнем с изучения композиций отражений в плоскости.

41.1. Композиции отражений в плоскости

Теорема 41.1

Движение пространства первого рода представимо в виде композиции двух или четырех отражений в плоскости.

Движение пространства второго рода есть либо отражение в плоскости, либо представимо в виде композиции трех отражений в плоскости.

Доказательство. Пусть f — некоторое движение пространства. Возьмем любой треугольник ABC, и пусть $A'=f(A)$, $B'=f(B)$ и $C'=f(C)$. Так как f — движение, то треугольники ABC и $A'B'C'$ равны. Может оказаться, что они симметричны относительно некоторой плоскости δ. Тогда отражение σ_δ в плоскости δ переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. В этом случае теорема 41.1 доказана, так как либо $f=\sigma_\delta$ (когда f — второго рода), либо если f первого рода, то $f=\sigma\circ\sigma_\delta$, где σ — отражение в плоскости $A'B'C'$ (по теореме 40.1, *а*).

Рассмотрим теперь общий случай расположения треугольников ABC и $A'B'C'$. Возьмем плоскость α, относительно которой симметричны A и A' (если $A' \neq A$, то такая плоскость единственная; если же $A'=A$, то α — любая плоскость, проходящая через A). Пусть σ_α — отражение в плоскости α. Тогда $\sigma_\alpha(A)=A'$. Положим, $B''=\sigma_\alpha(B)$ и $C''=\sigma_\alpha(C)$. Пусть $B' \neq B''$ и β — плоскость, относительно которой симметричны точки B' и B'', а σ_β — отражение в плоскости β. Так как $A'B''=AB$ и $A'B'=AB$, то $A'B''=A'B'$. Поэтому точка A' равноудалена от точек B' и B'', а потому A' лежит в плоскости β (рис. 273). Следовательно, $\sigma_\beta(A')=A'$, $\sigma_\beta(B'')=B'$. Если же $B'=B''$, то полагаем, что β — любая плоскость, в которой лежит отрезок $A'B'$.

Положим, $C'''=\sigma_\beta(C'')$. Пусть γ — плоскость, относительно которой симметричны точки C' и C''', если $C''' \neq C'$. Если же $C'''=C'$, то полагаем, что γ — это плоскость $A'B'C'$. Так как $A'C'=A'C'''$ и $B'C'=B'C'''$, то $A' \in \gamma$ и $B' \in \gamma$. Значит, плоскость γ содержит отрезок $A'B'$. Поэтому, если σ_γ — отражение в плоскости γ, $\sigma_\gamma(A')=A'$, $\sigma_\gamma(B')=B'$ и $\sigma_\gamma(C''')=C'$.

Итак, движения f и $\sigma_\gamma \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$ переводят A в A', B в B' и C в C'. Если f второго рода, то по теореме 40.1, а $f=\sigma_\gamma \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$. Если же f первого рода, то по той же теореме $f=\sigma \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$, где σ — симметрия относительно плоскости $A'B'C'$. ■

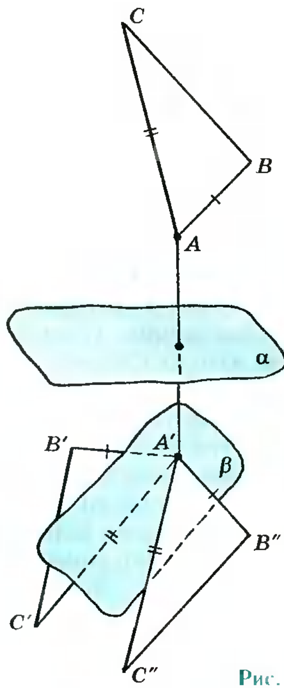


Рис. 273

Рассмотренные нами частные виды движений получаются композицией отражений в плоскости так:

1) *Композиция отражений в двух параллельных плоскостях есть параллельный перенос и обратно: каждый перенос можно осуществить композицией отражений в двух параллельных плоскостях* (рис. 274).

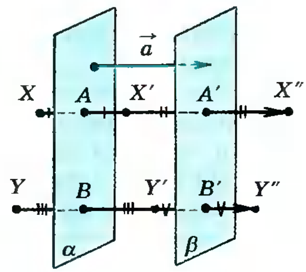


Рис. 274

2) *Композиция отражений в двух пересекающихся плоскостях является поворотом вокруг прямой пересечения этих плоскостей* (рис. 275). Обратно: *каждый поворот вокруг прямой можно осуществить композицией отражений в двух плоскостях, проходящих через эту прямую, причем одной из этих плоскостей можно выбрать любую плоскость, проходящую через данную прямую.*

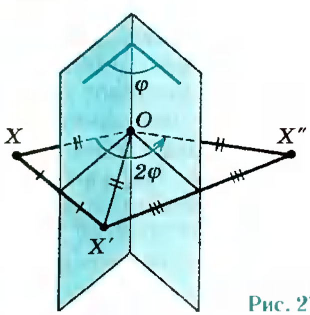


Рис. 275

3) *Центральная симметрия относительно данной точки является композицией трех отражений относительно любых трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся в этой точке* (рис. 276).

Докажите все эти утверждения самостоятельно. Укажите, как в первом случае определяют вектор переноса две параллельные плоскости, а во втором случае — две пересекающиеся плоскости угол поворота. Обратите внимание, что перемена порядка отражений в двух плоскостях изменяет направление переноса или поворота на противоположное, не меняя длины вектора переноса и величины угла поворота.

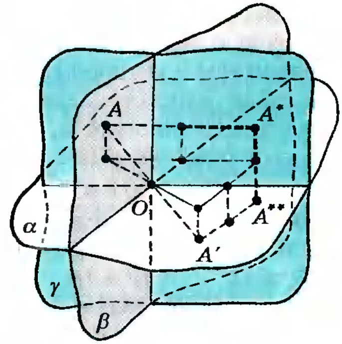


Рис. 276

Перечисленные свойства композиций зеркальных симметрий имеют существенное применение в технике. Например, на последнем из них основано устройство так называемого уголкового отражателя, который состоит из трех взаимно перпендикулярных зеркал (чаще всего берется система таких элементов). Луч, попадающий на уголковый отражатель, возвращается, благодаря указанному свойству композиции трех зеркальных симметрий, по параллельному лучу фактически в то место, откуда он был послан. Такие отражатели устанавливаются на велосипедах и автомашинах, используются в радиотехнике. Уголковые отражатели были установлены на Луне космическими станциями.

41.2. Движения первого рода как винтовые движения

В этом пункте мы докажем, что любое движение пространства первого рода есть винтовое движение.

Определение

Винтовым движением называется композиция поворота и переноса на вектор, параллельный оси поворота. (О таком переносе можно сказать, что он происходит вдоль оси поворота.)

Это соответствует тому, что происходит, когда предмет, насаженный на стержень, может вращаться и скользить вдоль него (рис. 277). Представление о винтовом движении дает ввинчивающийся или вывинчивающийся винт. Отсюда его название.

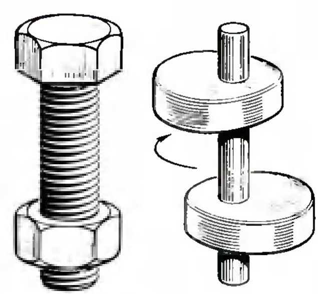


Рис. 277

То, что винтовое движение действительно есть движение, т. е. сохраняет расстояния, следует из того, что оно есть композиция движений — поворота вокруг оси и переноса. Порядок, в котором происходят перенос и поворот в винтовом движении, не имеет значения — результат от этого не зависит (потому что перенос вдоль оси только переносит плоскости, перпендикулярные оси).

Поворот и перенос можно считать частными случаями винтового движения: винтовое движение с нулевым переносом — это поворот, а винтовое движение с нулевым поворотом — это перенос.

При композиции винтовых движений с общей осью повороты сочетаются с поворотами, переносы — с переносами. Композиция поворотов дает поворот. Его угол равен сумме углов сочетаемых поворотов (с точностью до слагаемых, кратных 360°). Композиция переноса в винтовых перемещениях дает перенос.

При данной оси возможны два типа винтового движения в зависимости от направления переноса и поворота. В практике это выражается в том, что различаются правый винт и левый винт. Один тип винтового движения отличается от другого направлением поворота или переноса. Если у винта изменяется направление поворота (или направление переноса), то тип винта изменится. Если у винта изменяются сразу и направление переноса, и направление поворота, то тип винта не изменится (подумайте почему).

Теперь докажем основной результат этого пункта.

Доказательство основного результата мы начнем с того случая, когда движение имеет неподвижную точку. Этот случай характеризуется следующей теоремой.

Теорема 41.2

Любое движение пространства первого рода, имеющее неподвижную точку, является поворотом вокруг прямой.

Иначе говоря, *если точка фигуры закреплена, то результатом непрерывного движения этой фигуры является поворот вокруг некоторой прямой, проходящей через закрепленную точку.*

Доказательство. Пусть O — неподвижная точка перемещения первого рода f. Возьмем любую точку $A \neq O$ и любую точку B, не лежащую на прямой AO, и пусть $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$. Как установлено при доказательстве теоремы 41.1, треугольник OAB можно перевести в равный ему треугольник $OA'B'$ композицией двух отражений в плоскостях α и β, относительно которых симметричны соответственно пары точек A, A' и $B'' = \sigma_\alpha(B)$, B' (рис. 278).

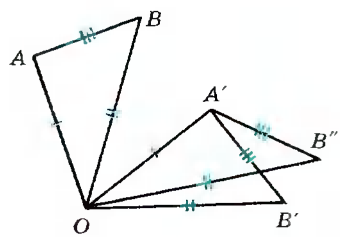


Рис. 278

Но композиция таких отражений есть поворот вокруг прямой $l = \alpha \cap \beta$. По теореме 40.1, а движение f и есть этот поворот. ■

Перед тем как рассмотреть общий случай, докажем одну лемму о композиции переноса и поворота.

Лемма 41.1

Композиция переноса и нетождественного поворота вокруг прямой, перпендикулярной направлению переноса, есть поворот вокруг некоторой прямой, параллельной оси данного поворота.

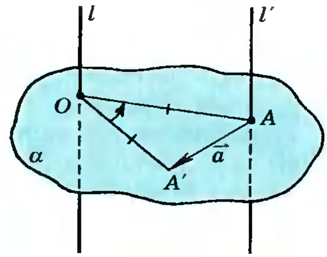


Рис. 279

Доказательство. Пусть f — поворот вокруг прямой l и g — перенос на вектор $\vec{a} \perp l$. Возьмем любую плоскость $\alpha \perp l$ (рис. 279). Пусть O — точка пересечения α и l. Построим в плоскости α равнобедренный треугольник OAA' с вершиной O и таким основанием AA', что $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, и с углом при вершине, равным углу поворота f. Тогда поворот f переводит точку A' в A, т. е. $f(A')=A$. Убедитесь, что существует единственный такой треугольник. Точка A является неподвижной точкой движения $f \circ g$, так как $f \circ g(A)=f(A')=A$. Более того, любая точка прямой $l' \parallel l$, проходящей через точку A, является неподвижной для движения $f \circ g$ и других неподвижных точек у $f \circ g$ нет. По теореме 39.6 $f \circ g$ — поворот вокруг l'. ■

Теорема 41.3

Любое движение пространства первого рода есть винтовое движение, которое, в частности, может быть переносом или поворотом вокруг прямой.

Доказательство. Пусть f — движение пространства первого рода. Возьмем некоторую точку A и пусть $A'=f(A)$. Если g' — перенос на вектор $\overrightarrow{A'A}$, то движение $f \circ g'$ имеет точку A' своей неподвижной точкой, так как $f \circ g'(A')=f(A)=A'$. Поэтому $f \circ g'$ есть поворот h вокруг некоторой прямой l, проходящей через A':

$$h=f \circ g'. \tag{41.1}$$

Если g — перенос на вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AA'}$, то $g' \circ g$ — тождественное преобразование, а тогда из равенства (41.1) вытекает, что

$$h \circ g=f \circ g' \circ g=f, \tag{41.2}$$

т. е. f есть композиция переноса g на вектор $\vec{a}$ и поворота h вокруг прямой l. Разложим вектор $\vec{a}$ на составляющие векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, из которых первый параллелен прямой l, а второй перпендикулярен ей. Если g_1 — перенос на вектор $\vec{b}$, а g_2 — перенос на вектор

$\vec{c}$, то, как сказано в п. 39.1, $g=g_2 \circ g_1$. Поэтому из (41.2) следует, что $f=h \circ g=h \circ g_2 \circ g_1$. Но по лемме 41.1 движение $h \circ g_2$ — это поворот h_1 вокруг некоторой прямой $l_1 \| l$. Поэтому $f=h_1 \circ g_1$. Так как вектор $\vec{b} \| l_1$, то f есть винтовое движение — композиция переноса g_1 на вектор $\vec{b}$ и поворота h_1 вокруг прямой $l_1 \| \vec{b}$. ■

Итак, никаких других движений первого рода, кроме винтовых, нет. Одним из примеров реализации этой теоремы может служить работа башенного подъемного крана со стрелой переменной длины: он может переместить груз из любого места строительной площадки в любое другое ее место.

41.3. Движения второго рода, имеющие неподвижную точку, как зеркальный поворот

С зеркальными поворотами мы познакомились в п. 26.6 как с движениями, самосовмещающими антипризмы.

Напомним, что **зеркальным поворотом** вокруг оси a на угол φ называется композиция поворота вокруг оси a на угол φ и отражения в плоскости, перпендикулярной оси поворота (рис. 280). Так как поворот и отражение — движения, то и зеркальный поворот — движение.

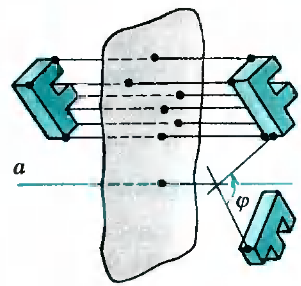


Рис. 280

Говоря о композиции движений, нужно указывать порядок, в котором они совершаются. Результат в общем случае зависит от порядка, рассмотрите, например, композицию двух отражений, взятых в различном порядке, относительно двух неперпендикулярных плоскостей. Но для зеркального поворота безразличен порядок составляющих его движений: произвести ли сначала поворот, а потом отражение или наоборот, результат будет тот же.

Это непосредственно видно, если представить себе, как отображается при повороте и отражении любая точка A (рис. 281). Пусть поворот происходит вокруг оси a, а отражение — в плоскости $\alpha \perp a$. Пусть B — точка, симметричная точке A относительно плоскости α. Поворот вокруг оси a происходит в плоскостях, перпендикулярных a и, значит, параллельных α. Поэтому при повороте точки A и B переходят в точки C и D, тоже симметричные относительно плоскости α.

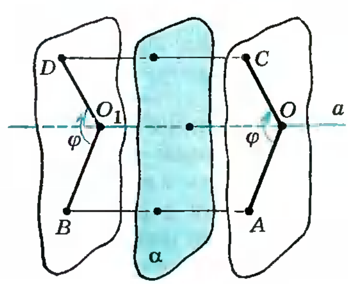


Рис. 281

Если сначала происходит отражение, а потом поворот, то точка A сначала отображается в точку B, а потом в точку D. Если же происходит сначала поворот, а потом отражение, то точка A сначала отображается в C, а потом в D. Таким образом, результат не зависит от порядка, в котором происходит поворот и отражение. (Как видно из вывода, перестановочность здесь имеет место благодаря тому, что $\alpha \perp a$, иначе результат зависит от порядка.)

Зеркальный поворот любой фигуры естественно распространяется на все пространство.

Отражение в плоскости можно рассматривать как частный случай зеркального поворота — с нулевым углом поворота.

Случай, противоположный отражению в плоскости, представляет зеркальный поворот с максимально возможным углом, т. е. с поворотом на 180°. Этот зеркальный поворот будет, оказывается, центральной симметрией с центром в точке пересечения плоскости отражения и оси поворота. Попробуйте убедиться в этом самостоятельно.

Произведя зеркальный поворот, совмещающий фигуру саму с собой, можно затем повторить его и т. д. При двух зеркальных поворотах содержащиеся в них отражения «взаимно уничтожаются» и получается просто поворот на удвоенный угол. Так, для фигуры F, состоящей из оснований G_1 и G_2 некоторой антипризмы (рис. 282), один зеркальный поворот поменяет G_1 и G_2 местами, а второй вернет их на прежнее место, но уже повернутыми на угол $2\varphi = 2 \cdot \frac{360°}{2n} = \frac{360°}{n}$.

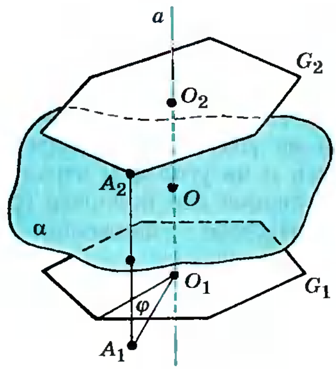


Рис. 282

Если произвести еще раз зеркальный поворот, то отражения опять появятся и получится зеркальный поворот на угол 3φ.

Выясняется общее правило. *Зеркальный поворот на угол φ, повторенный четное число $2m$ раз, дает поворот на угол $2m\varphi$. Тот же зеркальный поворот, повторенный нечетное число $2m+1$ раз, дает зеркальный поворот.*

Сказанное представляет собой частный случай общей теоремы.

Композиция двух зеркальных поворотов с общей осью и общей плоскостью отражения представляет собой поворот вокруг этой же оси на суммарный угол. Композиция зеркального поворота с поворотом вокруг той же оси представляет собой зеркальный поворот с той же осью и той же плоскостью отражения и с суммарным углом.

(При этом в обоих утверждениях суммарный угол берется, понятно, с учетом знака, т. е. направления поворота, и с точностью до слагаемых, кратных 360°.)

Роль зеркальных поворотов характеризует следующая теорема:

Теорема 41.4

Любое движение пространства второго рода, имеющее неподвижную точку, является зеркальным поворотом, который, в частности, может быть центральной или зеркальной симметрией.

Доказательство. Пусть O — неподвижная точка движения пространства второго рода f. Множество неподвижных точек движения f либо состоит из одной точки O, либо является плоскостью, проходящей через O (всем пространством или прямой оно быть не может, так как этим случаям соответствует поворот или тождественное движение, т. е. движение первого рода).

Если у f множество неподвижных точек — плоскость, то f — отражение в этой плоскости (теорема 39.4).

Поэтому осталось рассмотреть случай, когда у f единственная неподвижная точка — точка O. В этом случае может оказаться, что для любой точки $A \neq O$ ее образ $B=f(A)$ лежит на прямой OA. Так как $OA=OB$ и $B \neq A$, то O — середина отрезка AB. Но тогда f — симметрия относительно точки O.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда найдется такая точка $A \neq O$, образ которой — точка $B=f(A)$ — не лежит на прямой AO. Пусть точка $C=f(B)$. Точка C отлична от A, так как если $C=A$, то движение f переводит отрезок AB в BA и имеет его середину своей неподвижной точкой. А это невозможно, так как эта середина отлична от точки O — единственной неподвижной точки движения f.

Мы получили два равнобедренных треугольника OAB и OBC с общей вершиной O и общей стороной OB (рис. 283). Движение f переводит треугольник OAB в треугольник OBC.

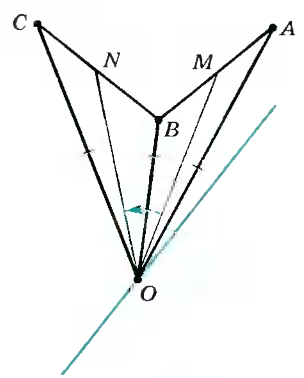


Рис. 283

Проведем высоты OM и ON в этих треугольниках. Тогда зеркальный поворот вокруг прямой $l \perp (OMN)$ на угол MON также переводит треугольник OAB в треугольник OBC. По теореме 40.1, *а* движение f совпадает с этим зеркальным поворотом. ■

41.4. Движения второго рода, не имеющие неподвижных точек, как скользящие отражения

Для полной классификации всех движений пространства нам осталось рассмотреть движения второго рода, не имеющие неподвижных точек. Это так называемые скользящие отражения. Дадим им определение.

Определение

Скользящим отражением называется композиция отражения в некоторой плоскости и переноса («скольжения») вдоль этой плоскости (т. е. переноса на вектор, параллельный этой плоскости).

Легко убедиться, что порядок, в котором производится здесь отражение и перенос, безразличен (рис. 284).

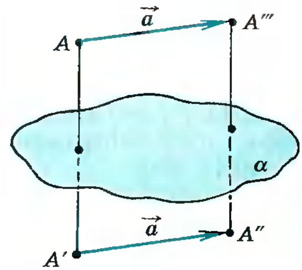


Рис. 284

Скользящее отражение задается двумя данными: плоскостью отражения α и вектором переноса $\vec{a} \parallel \alpha$. Отражение в плоскости можно рассматривать как частный случай скользящего отражения, когда $\vec{a} = \vec{0}$.

Перед тем как доказать основной результат этого пункта, докажем следующую лемму:

Лемма 41.2

Композиция переноса и отражения в плоскости, перпендикулярной вектору переноса, есть отражение в некоторой плоскости, параллельной данной.

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a}$ задает перенос f и плоскость $\alpha \perp \vec{a}$ задает отражение σ_α. Возьмем плоскость β, получающуюся из α переносом на вектор — $\frac{\vec{a}}{2}$ (рис. 285). Легко видеть, что точки этой плоскости неподвижны при движении $\sigma_\alpha \circ f$. Поэтому это движение есть отражение в плоскости β. ■

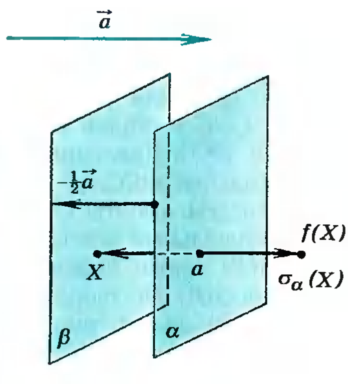


Рис. 285

Теорема 41.5

Движение пространства второго рода, не имеющее неподвижных точек, есть скользящее отражение.

Доказательство. Пусть f — движение пространства второго рода, не имеющее неподвижных точек. Возьмем любую точку A, и пусть $B=f(A)$. Тогда если g' — перенос на вектор $\overrightarrow{BA}$, то отображение $h=f\circ g'$ будет движением второго рода. Оно имеет точку B своей неподвижной точкой, так как $h(B)=f(g'(B))=f(A)=B$. Поэтому h по теореме 41.4 является зеркальным поворотом, т. е. композицией отражения σ_α в некоторой плоскости α и поворота φ вокруг некоторой прямой $l\perp\alpha$, т. е. $h=\varphi\circ\sigma_\alpha$.

Пусть g — перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$, т. е. перенос, обратный переносу g'. Тогда из равенства $h=f\circ g'$ следует, что $h\circ g=f\circ g'\circ g$, а так как $g'\circ g$ — тождественное отображение, то $f=h\circ g$. Разложим вектор $\overrightarrow{AB}$ на составляющие $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, из которых первая параллельна плоскости α, а вторая перпендикулярна ей. Если g_1 — перенос на вектор $\vec{a}_1\parallel\alpha$, а g_2 — перенос на вектор $\vec{a}_2\perp\alpha$, то, поскольку $\overrightarrow{AB}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$, имеем, что $g=g_2\circ g_1$.

Подставляя в равенство $f=h\circ g$ выражения $g=g_2\circ g_1$ и $h=\varphi\circ\sigma_\alpha$, получаем $f=\varphi\circ\sigma_\alpha\circ g_2\circ g_1$. Так как $a_2\perp\alpha$, то по лемме 41.2 движение $\sigma_\alpha\circ g_2$ есть отражение σ_β в некоторой плоскости $\beta\parallel\alpha$. Поэтому $f=\varphi\circ\sigma_\beta\circ g_1$.

Покажем, что φ — тождественный поворот. Так как $l\perp\alpha$ и $\beta\parallel\alpha$, то $l\perp\beta$. Значит, отображение $\varphi\circ\sigma_\beta$ является зеркальным поворотом и не зависит от порядка выполнения отражения σ_β и поворота φ, т. е. $\varphi\circ\sigma_\beta=\sigma_\beta\circ\varphi$. Поэтому $f=\sigma_\beta\circ\varphi\circ g_1$. Если φ не тождественный поворот, то, поскольку $\vec{a}_1\perp l$, по лемме 41.1 движение $\varphi\circ g_1$ является поворотом φ_1 вокруг некоторой прямой $l_1\parallel l$. А тогда $f=\sigma_\beta\circ\varphi_1$ является зеркальным поворотом и имеет неподвижную точку, что противоречит выбору f.

Поэтому φ — тождественное отображение. А тогда $f=\sigma_\beta\circ g_1$, т. е. f — скользящее отражение. ■

Дополнение к параграфу 41

Винтовая линия

Винтовой линией называется кривая, которую описывает точка, совершающая равномерное винтовое движение. Винтовое движение слагается из равномерного движения вдоль прямой и равномерного вращения вокруг прямой, причем движущаяся точка остается на постоянном расстоянии от этой прямой (рис. 286). Эта прямая может быть названа осью винтового движения и соответственно **осью винтовой линии.**

Из данного определения следует, что винтовая линия лежит на круговом цилиндре с той же осью.

Найдем уравнения винтовой линии. Введем прямоугольные координаты x, y, z так, что ось z совпадает с осью винтовой линии и ось x проходит через точку винтовой линии, соответствующую значению параметра $t=0$ (т. е. начальному моменту времени t). Пусть v — скорость движения вдоль оси и r — расстояние от точки винтовой линии до ее оси, т. е. радиус основания цилиндра, на котором лежит винтовая линия. За время t точка перемещается по винтовой линии в направлении оси z на расстояние vt, т. е. $z=vt$.

Проекция этой точки на плоскость xy движется по окружности радиусом r с постоянной угловой скоростью ω. Поэтому за время t она повернется на угол ωt и опишет дугу длиной $p=r\omega t$. Координаты этой точки окружности на плоскости xy, очевидно, равны $x=r\cos\omega t$ и $y=r\sin\omega t$. Поэтому параметрические уравнения винтовой линии имеют вид:

$$x=r\cos\omega t,\ y=r\sin\omega t,\ z=vt. \qquad (1)$$

Найдем длину дуги винтовой линии. Возьмем на данной винтовой линии две близкие точки A и B со значениями параметра t и $t+\Delta t$ (считая $\Delta t>0$). Пусть B' — проекция точки B на плоскость, перпендикулярную оси и проходящую через точку A (рис. 287). Тогда треугольник ABB' прямоугольный, так что

$$AB^2=AB'^2+B'B^2. \qquad (2)$$

Отрезок BB' дает смещение точки вдоль оси, так что

$$|BB'|=v\Delta t. \qquad (3)$$

Точка B' лежит на том же расстоянии r от оси, что и B. Поэтому длина дуги AB' равна $r\omega\Delta t$, а хорда AB' относительно мало отличается от дуги, так что

$$AB'\approx r\omega\Delta t. \qquad (4)$$

Сопоставляя (2), (3), (4), получаем:

$$|AB|\approx\sqrt{v^2+r^2\omega^2}\,\Delta t.$$

Поэтому длина ломаной с малыми звеньями, вписанной в винтовую линию, будет:

$$\sum|AB|\approx\sqrt{v^2+r^2\omega^2}\,\Delta t.$$

В пределе получим длину дуги

$$s=\sqrt{v^2+r^2\omega^2}\,(t_2-t_1), \qquad (5)$$

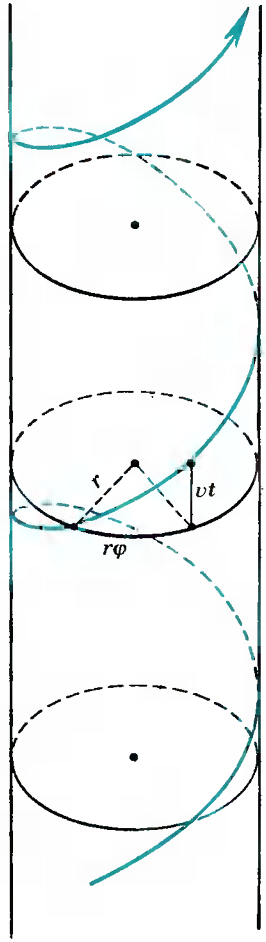


Рис. 286

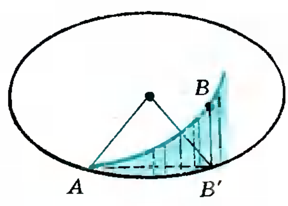


Рис. 287

где t_1 и t_2 — параметры, соответствующие началу и концу дуги.

Величина $h=v(t_2-t_1)$ есть смещение точки вдоль оси, а $p=r\omega(t_2-t_1)$ — длина дуги, описанной на окружности радиусом r. Поэтому из (5)

$$s^2=h^2+p^2.$$

Это равенство аналогично теореме Пифагора. Эта связь выясняется, если цилиндр, на котором лежит винтовая линия, развернуть на плоскость. Тогда дуга винтовой линии развернется (отобразится) в гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами длиной h и p.

Если катить цилиндр по плоскости, на которой чернилами проведена прямая линия, то след ее на цилиндре даст винтовую линию (или окружность).

Задачи

Разбираемся в решении

41.1. Возьмите композицию двух любых известных вам движений и попытайтесь установить, каким движением она является.

Решение

Благодаря теоремам, доказанным в этом параграфе, мы можем говорить, что существуют лишь три вида движений: винтовые, скользящие симметрии и зеркальные повороты. Из них четыре композиции — двух винтовых, двух скользящих симметрий, двух зеркальных поворотов и скользящей симметрии и зеркального поворота — будут движениями первого рода, а потому винтовым движением.

Осталось рассмотреть лишь два случая: композицию винтового движения со скользящей симметрией или зеркальным поворотом. В каждом из них может получиться лишь движение второго рода, т. е. снова скользящая симметрия (если нет неподвижных точек) или зеркальный поворот (если неподвижные точки есть). Разберите подробно возможные случаи в зависимости от расположения оси винта, центра и плоскости зеркального поворота или оси винта, плоскости и направления скользящего отражения.

Рисуем

41.2. Нарисуйте фигуру, которая переходит в себя в результате винта; зеркального поворота; скользящего отражения; двух из этих движений; всех трех движений.

41.3. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Выполнено движение: а) винт с осью поворота, проходящей через центры O и O_1 граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, и вектором $\overrightarrow{AA_1}$. Угол поворота равен 45°; б) зеркальный поворот с осью поворота OO_1 и отражением в плоскости, перпендикулярной (OO_1) и проходящей через центр куба. Угол поворота 45°; в) скользящее отражение, где отражение происходит в плоскости, перпендикулярной диагонали и проходящей через центр куба, а вектор равен $\overrightarrow{AC}$. Нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного кубов.

41.4. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Рассматривается: а) винт с осью поворота PQ (Q — центр основания), углом поворота 60° и вектором $\frac{1}{2}\overrightarrow{QP}$; б) зеркальный поворот с осью поворота (PQ), углом поворота 60° и плоскостью отражения, перпендикулярной (PQ) и проходящей через середину высоты PQ; в) скользящее отражение с плоскостью отражения, проходящей через PB и K — середину AC, и вектором $\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}$. Нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного тетраэдров.

Представляем

41.5. Изменяется ли ориентация базиса пространства в результате винта, зеркального поворота, скользящего отражения?

41.6. Пусть движение f — винт, зеркальный поворот или скользящее отражение. Имеет ли оно неподвижные точки? прямые? плоскости?

41.7. Движение второго рода имеет единственную неподвижную точку. Что это за движение? Придумайте аналогичные задачи.

Доказываем

41.8. Докажите, что винтовое движение является композицией двух осевых симметрий. Разлагается ли в композицию осевых симметрий зеркальный поворот? скользящее отражение?

41.9. Две равные правильные пирамиды P_1ABCD и P_2ABCD имеют общее основание $ABCD$. Точка K — середина ребра P_1B, точка L — середина ребра P_2A_2, точка M — точка пересечения медиан в грани ADP_2, точка N — точка пересечения медиан в грани CDP_1. Докажите, что:
а) $\angle(P_1C)(P_2B)=\angle(P_2B)(P_1A)$;
б) $\angle(P_1B)(P_2CD)=\angle(P_2A)(P_1BC)$;
в) $\angle(P_1AB)(P_2AD)=\angle(P_2AD)(P_1CD)$; г) $KM=LN$;
д) расстояние от K до (CDP_2) равно расстоянию от L до (P_1BC).

Исследуем

41.10. Пусть движение f является винтом, зеркальным поворотом или скользящим отражением. Прямая b получена из прямой a движением f. Как могут быть расположены прямые a и b? Решите аналогичную задачу для плоскостей.

41.11. Пусть движение f является винтом, зеркальным поворотом или скользящим отражением. Даны две фигуры. Найдите такое движение указанного вида, которое переводит одну фигуру в другую, если эти фигуры: а) точки; б) прямые; в) плоскости; г) равные шары; д) равные цилиндры; е) равные тетраэдры.

41.12. Дана треугольная антипризма $ABCA_1B_1C_1$ с ребром 1. а) Опишите, как она получена из призмы. б) Является ли она выпуклым многогранником? в) Есть ли в ней параллельно расположенные ребра? г) Имеет ли она плоскость симметрии, центр симметрии? д) Нарисуйте ее сечение, являющееся квадратом.

Прикладная геометрия

41.13. На цилиндре радиусом R и высотой H намотана проволока. Как вы узнаете ее длину?

41.14. Вам нужно спроектировать винтовую лестницу. Какие данные для этого понадобятся?

§ 42. Симметрия

42.1. Общее понятие симметрии

О симметрии различных фигур и о преобразованиях симметрии мы говорили на протяжении всего курса геометрии. Напомним, что **симметрией фигуры** называется свойство фигуры, состоящее в том, что существует ее (нетождественное) движение, совмещающее ее саму с собой.

Слово «симметрия» происходит от греческого и означает «соразмерность». В таком общем смысле симметрия играет огромную роль в искусстве, особенно ясную в орнаментах и архитектуре, где постоянно встречается симметрия в достаточно точном геометрическом смысле как совмещаемость частей при самосовмещаемости целого (рис. 288).

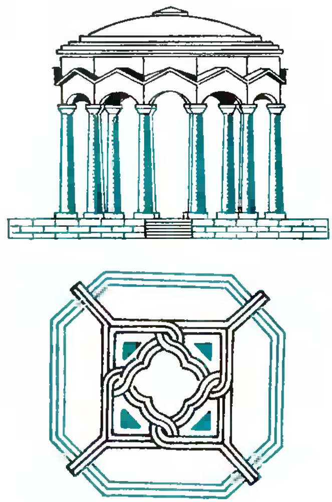


Рис. 288

Учение о симметрии составляет важную и обширную часть геометрии, особенно в той ее части, которая касается симметрии кристаллов. Здесь она включается в науку, называемую геометрической кристаллографией.

Из физики известно, что атомы в кристаллах образуют кристаллическую решетку, т. е. некую правильную систему фигур, совмещающихся одна с другой переносами и другими перемещениями (рис. 289).

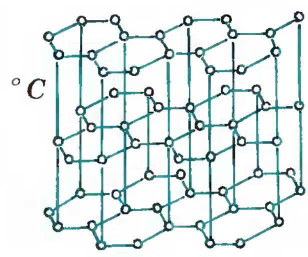


Рис. 289

Помимо кристаллов, симметрия в природе наблюдается у живых организмов. У растений наблюдается симметрия цветов, симметрия расположения листьев, в частности винтовая. У животных особенно примечательны в этом смысле морские звезды (рис. 290).

В последнее время общее учение о симметрии приобрело большое значение в физике, с ним связаны основные законы природы.

Симметрия фигуры тем больше, чем больше есть движений, которые совмещают ее саму с собой. Установите, какая фигура богаче симметриями: цилиндр, конус или шар. Самая симметричная фигура — это все пространство. Любое движение совмещает его с собой.

О симметрии написано много книг, в том числе и популярных. Назовем некоторые из них:

Вейль Г. Симметрия. — М.: Наука, 1968.

Тарасов Л. В. Этот удивительно симметричный мир.— М.: Просвещение, 1982.

Узоры симметрии: Сб. работ. — М.: Мир, 1980.

Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре.— М.: Наука, 1967.

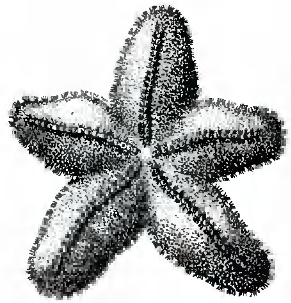


Рис. 290

42.2. Группа симметрии

Для движений, совмещающих фигуру саму с собой, выполняется следующая основная теорема:

Теорема 42.1 *(о симметрии)*

Если движение совмещает фигуру саму с собой, то их композиция (в любом порядке) тоже совмещает эту фигуру саму с собой. Если какое-то движение совмещает фигуру саму с собой, то обратное движение тоже совмещает фигуру саму с собой.

Доказательство. Пусть два движения f и g по отдельности совмещают фигуру F саму с собой. Если мы произвели одно из них, скажем f, то фигура F совместилась сама с собой. В результате получим композицию $g \circ f$, совместившую фигуру F саму с собой.

Композиция движений есть движение. Поэтому $g \circ f$ есть движение, совмещающее фигуру F саму с собой.

Покажем это и для обратного движения. Пусть движение f совмещает фигуру F саму с собой, как это следует из определения отображения, обратного данному. ■

Движения фигуры, совмещающие ее саму с собой, называют ее **преобразованиями симметрии**. Совокупность всех преобразований симметрии данной фигуры (включая тождественное преобразование) называют ее **группой симметрии**.

Мы уже фактически дали описание групп симметрии для различных фигур: сферы и шара, правильных призм и пирамид, правильных многогранников и всего пространства (а также для правильных многоугольников и плоскости).

Кристаллография поставила перед геометрией задачу описания всех возможных типов правильных разбиений плоскости и пространства на многоугольники и многогранники, классификации соответствующих им правильных точечных решеток и их групп симметрии. (Они называются кристаллографическими группами.) Эта задача была решена в конце XIX в. знаменитым русским кристаллографом Евграфом Степановичем Федоровым (1853—1919). Он доказал, что на плоскости имеется 17, а в пространстве — 230 кристаллографических групп. В своих исследованиях он существенно опирался на теоремы Шаля о классификации движений плоскости (см.: «Геометрия, 8—9», § 28) и теоремы о классификации движений пространства (см. § 41).

42.3. Элементы групп симметрии ограниченных и неограниченных фигур

Если группа симметрии некоторой фигуры F содержит перенос на ненулевой вектор $\vec{a}$, то фигура F вместе с любой своей точкой A_0 содержит и всю неограниченную последовательность точек A_1, A_2, ..., A_n, ..., таких, что $\overrightarrow{A_0A_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}$ и т. д. Поэтому такая фигура F сама будет неограниченной.

Следовательно, группа симметрии ограниченной фигуры F в пространстве может иметь своими элементами лишь повороты и зеркальные повороты. Напомним, что осевая симметрия в пространстве — это частный случай поворота (на 180°), а зеркальная и центральная симметрии в пространстве — это частные случаи зеркального поворота (на 0° и 180°). Поэтому элементами симметрии ограниченной фигуры в пространстве могут быть лишь центры, оси и плоскости симметрии, а также оси поворотной и зеркально-поворотной симметрии некоторого порядка. Например, правильная n-угольная призма имеет ось поворотной симметрии порядка n. У фигур вращения ось бесконечного порядка. У n-угольной антипризмы есть зеркальная ось порядка $2n$. Эта ось одновременно является осью поворотной симметрии порядка n, так как дважды повторенный зеркальный поворот равносилен повороту на удвоенный угол.

Кроме этих элементов симметрии, у неограниченных фигур могут быть еще другие, связанные с параллельным переносом. Например, фигура может совмещаться сама с собой повторением некоторого переноса, про-

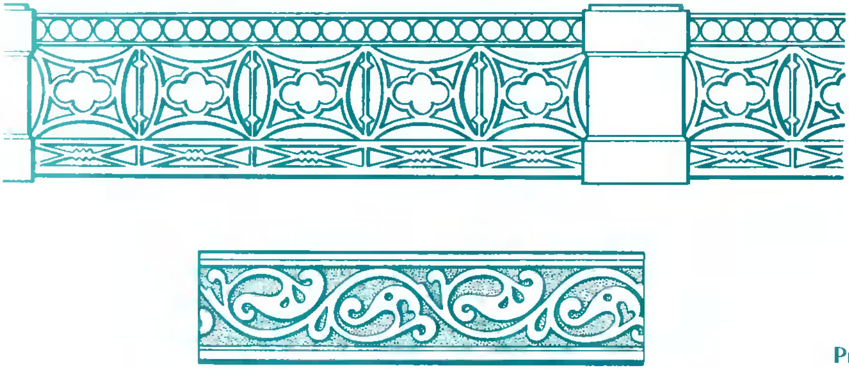


Рис. 291

стейший пример — точки на прямой на равных расстояниях. Или фигура может иметь винтовую симметрию, совмещаясь сама с собой винтовым движением.

Реальные предметы ограничены и потому не могут в точном смысле иметь ни переносной, ни винтовой симметрии. Однако одни их части могут допускать совмещения с другими частями переносами или винтовыми движениями, так что при мысленном бесконечном продолжении получается фигура с переносной или винтовой симметрией. В этом смысле переносной симметрией обладают многие орнаменты, решетки оград, ряды кресел в зале и другие ряды одинаковых предметов (рис. 291). Атомы или их комплексы в кристаллах образуют кристаллическую решетку, которая тоже обладает переносной симметрией (рис. 292). Примеры винтовой симметрии можно видеть на винтовой лестнице и на расположении листьев у многих растений.

Особая роль симметрии позволяет дать аксиоматику евклидовой геометрии, базирующейся на свойствах симметрий. Такое аксиоматическое построение евклидовой геометрии было осуществлено в середине XIX в. немецким математиком Фридрихом Бахманом (см.: Б а х м а н Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии.— М.: Наука, 1969).

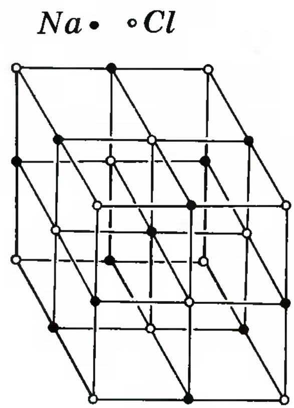


Рис. 292

Задачи

Представляем

42.1. В результате каких движений пространства переходит в себя: а) отрезок; б) прямая; в) круг; г) квадрат; д) правильный многоугольник; е) ромб; ж) плоскость; з) двугранный угол?

42.2. В результате каких движений переходит в себя правильная пирамида: а) четырехугольная; б) n-угольная?

42.3. В результате каких движений переходит в себя объединение двух равных n-угольных ($n>4$) правильных пирамид с общим основанием?

42.4. В результате каких движений переходит в себя тетраэдр $PABC$, у которого: а) $PB=PC=AC=AB$; б) $PB=PC=AC=AB$, $PA=BC$; в) $PA=BC$, $PB=AC$, $PC=AB$?

42.5. Приведите пример такого тетраэдра, который переходит в себя в результате таких движений, не считая тождественного: а) ровно одного отражения в плоскости; б) ровно двух отражений в плоскости; в) ровно трех отражений в плоскости; г) ровно одного поворота на 180°; д) трех поворотов на 180°.

42.6. Тело является объединением двух шаров, но не шаром. Какими движениями оно отображается на себя?

42.7. В правильном тетраэдре закрасили одну грань. а) В результате каких движений он самосовмещается? б) А если закрасить одним цветом две грани?

42.8. В результате каких движений переходит в себя куб, у которого окрашена одним цветом: а) одна грань; б) две грани; в) три грани; г) четыре грани; д) пять граней?

42.9. В результате каких движений переходит в себя куб, у которого срезаны по углам равные правильные треугольные пирамиды: а) с одного угла; б) с двух углов; в) с трех углов?

Исследуем

42.10. Все равные правильные тетраэдры покрасили так, что каждая грань стала окрашена одним из четырех цветов. Существуют ли среди них разные тетраэдры? Составьте и решите аналогичную задачу для куба.

42.11. Может ли множество самосовмещений некоторого многогранника содержать ровно три движения?

42.12. У четырехугольной пирамиды: а) все боковые ребра равны и противоположные плоские углы при вершине равны; б) все плоские углы при вершине равны и противоположные боковые ребра равны. Какова группа симметрий этой пирамиды?

42.13. Проверьте, что в правильном многограннике число самосовмещений делится на 2 и даже на 4. Поищите связь между числом его самосовмещений и числом каких-либо основных элементов. Сформулируйте гипотезу. Сможете ли вы ее доказать?

Рассуждаем

42.14. Является ли группой симметрии пространства множество движений пространства следующего вида: а) первого рода; б) второго рода; в) с одной и той же неподвижной точкой; г) с одной и той же неподвижной прямой; д) имеющее ровно одну неподвижную точку?

42.15. Образуют ли группу все отображающие куб на себя: а) зеркальные симметрии; б) осевые симметрии; в) повороты?

42.16. Образуют ли группу все отображающие правильный тетраэдр на себя: а) зеркальные симметрии; б) осевые симметрии; в) повороты?

42.17. Множество каких движений пространства одного вида образует группу симметрий пространства?

§ 43*. Аффинные преобразования

43.1. Определение и примеры аффинных преобразований

Слово «аффинные» (что по-латыни значит «родственные») мы применяли уже в п. 37.8 к косоугольным системам координат. А то обратимое отображение плоскости (или пространства), которое одну косоугольную систему координат переводит в другую косоугольную систему координат (рис. 293), тоже называется аффинным преобразованием плоскости (или пространства). Уточним это определение.

Аффинным преобразованием f плоскости (пространства) называется такое обратимое отображение ее (его) в себя, что найдутся две такие аффинные системы координат, относительно которых любая точка M в первой системе координат и ее образ $M'=f(M)$ во второй системе координат имеют одинаковые соответствующие координаты.

Аналогично можно определить и аффинное отображение f некоторой плоскости α в другую плоскость α' как отображение, для которого в плоскостях α и α' найдутся такие аффинные системы координат, что любая точка $M\in\alpha$ и ее образ $M'=f(M)\in\alpha'$ относительно этих систем имеют соответственно равные координаты (рис. 294).

Из данных определений следует, что отображение, обратное аффинному, тоже является аффинным.

Прямоугольные (декартовы) системы координат являются частными случаями аффинных систем. Движения преобразуют прямоугольные системы в прямоугольные. При этом каждая точка и ее образ имеют соответственно равные координаты относительно этих систем (рис. 295). Следовательно, движение является частным случаем аффинного преобразования.

Аналогичный вывод можно сделать и для подобия, но при этом в новой системе координат масштабные отрезки на осях надо умножить на коэффициент подобия (рис. 296).

Важным примером аффинного отображения плоскости, отличным от движения или подобия, является параллельное проектирование плоскости на плоскость (рис. 297). Из свойств параллельного проектирования следует, что оно сохраняет линейные операции с векторами (сложение и умножение на число). Поэтому при параллельном проектировании аффинные системы ко-

Рис. 293

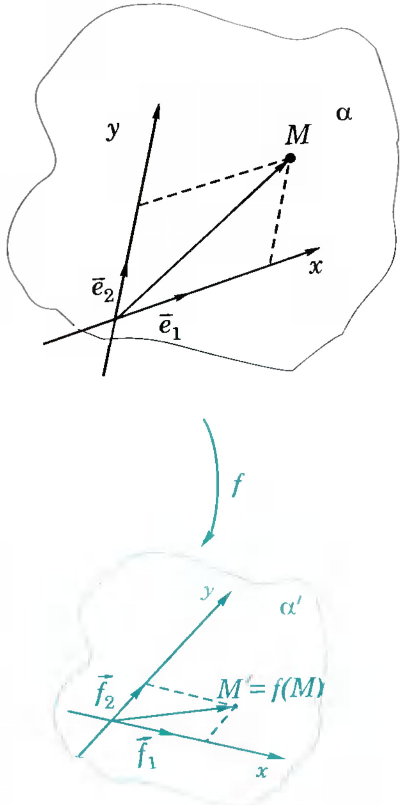


Рис. 294

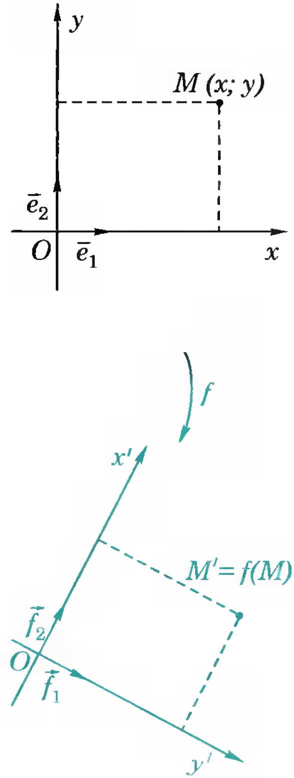


Рис. 295

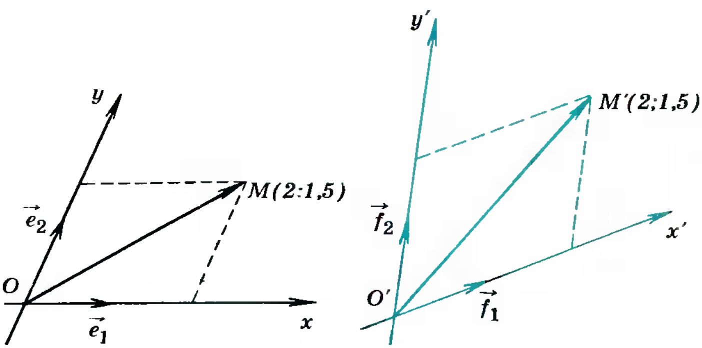


Рис. 296

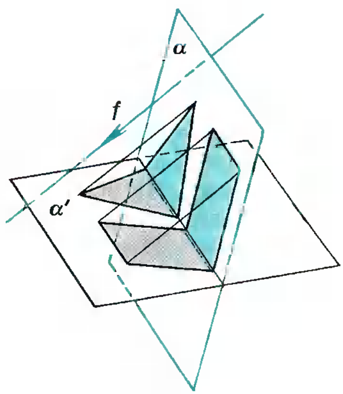


Рис. 297

ординат проектируются в аффинные системы с сохранением соответствующих координат.

Ортогональное проектирование f плоскости α на плоскость β — это частный случай параллельного проектирования (рис. 298). Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a и φ — острый угол между плоскостями α и β. Введем на α и β прямоугольные координаты x, y, считая, что осью x является прямая a. Повернув плоскость β вокруг прямой a, совместим ее с плоскостью α. Тогда отображение f в координатах задается равенствами $x'=x$, $y'=ky$, где (x, y) — координаты точки M, (x', y') — координаты ее образа $M'=f(N)$ и $k=\cos\varphi$. Аффинное отображение естественно называть **сжатием к оси x с коэффициентом $k>0$.**

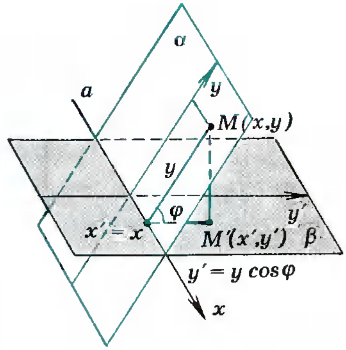


Рис. 298

Обратное для отображения f отображение f^{-1} задается равенствами $x'=x$, $y'=\frac{1}{k}y$, и его надо было бы назвать растяжением, так как $\frac{1}{k}>1$. Но для него тоже употребляют термин «сжатие», не принимая во внимание величину положительного коэффициента при координате y.

Наконец, приведем еще один пример аффинного преобразования плоскости, который называется **сдвигом вдоль оси x.** Как геометрически задается такое преобразование, ясно из рисунка 299. Аналитически же оно задается равенствами $x'=x+ky$, $y'=y$, $k=\cos t$.

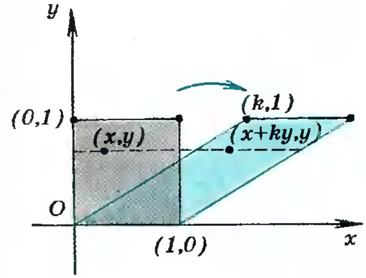


Рис. 299

43.2. Свойства аффинных преобразований

Из определения аффинных преобразований следует, что аффинные преобразования сохраняют все геометрические утверждения, формулирующиеся с помощью аффинных координат.

Например, в аффинных координатах прямая на плоскости и плоскость в пространстве задаются линейными уравнениями. Их образы после аффинных преобразований задаются в новых системах координат теми же уравнениями. Поэтому они являются соответственно прямой и плоскостью.

Из взаимной однозначности аффинных преобразований следует, что они сохраняют параллельность прямых и плоскостей.

Аналогичное рассуждение можно провести и для линейных операций с векторами.

Таким образом, имеют место такие два свойства аффинных преобразований:

Свойство 1

Аффинные преобразования переводят прямые в прямые, а плоскости в плоскости. Параллельность прямых и плоскостей при аффинных преобразованиях сохраняется.

Свойство 2

Аффинные отображения сохраняют линейные соотношения между векторами.

Оба эти свойства являются *характеристическими* и могут служить определениями аффинных отображений (естественно, вместе с условием обратимости). Следовательно, справедливы и утверждения, обратные свойствам 1 и 2. Объединяя утверждение, обратное свойству 1, и само свойство 1, получаем такое предложение:

Свойство 3

Обратимое преобразование плоскости (пространства) является ее (его) аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда оно переводит прямые (плоскости) в прямые (плоскости).

Из свойства 3 вытекает

Свойство 4

Композиция аффинных преобразований плоскости (пространства) является аффинным преобразованием плоскости (пространства).

Теперь воспользуемся свойством 2. Линейными соотношениями между векторами могут быть заданы отрезки, треугольники, тетраэдры, выпуклые многоугольники и многогранники. Поэтому следствием свойства 2 является такое свойство:

Свойство 5

При аффинных преобразованиях отрезки переходят в отрезки, треугольники — в треугольники, тетраэдры — в тетраэдры. Аффинные преобразования сохраняют выпуклость фигур.

Через операцию умножения вектора на число можно выразить отношение коллинеарных отрезков. Поэтому из свойства 2 вытекает и такое свойство:

Свойство 6

Аффинные преобразования сохраняют отношения коллинеарных отрезков. В частности, при аффинных преобразованиях середины отрезков переходят в середины отрезков, а медианы треугольников — в медианы образов этих треугольников.

Это свойство удобнее формулировать, используя понятие простого отношения тройки коллинеарных точек, т. е. точек, лежащих на одной прямой.

Простым отношением тройки коллинеарных точек A, B, C при условии, что $A \neq B$ и $B \neq C$, называется отношение $\frac{AC}{CB}$ длин направленных отрезков $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$, взятое со знаком «плюс», если $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$, и со знаком «минус», если $\overrightarrow{AC} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CB}$.

Из данного определения следует, что простое отношение тройки коллинеарных точек A, B, C равно числовому коэффициенту λ из векторного равенства: $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$.

Говоря «тройка точек A, B, C», а не «три точки A, B, C», мы подчеркиваем то обстоятельство, что эти точки упорядочены. Изменение порядка в тройке A, B, C ведет к изменению их простого отношения.

Точки A, B в тройке A, B, C называют **основными точками**, а точку C — **делящей**. Для простого отношения тройки точек применяют обозначение (A, B, C).

Данные определения позволяют свойство 6 сформулировать так:

Свойство 7

Аффинные отображения сохраняют простые отношения троек коллинеарных точек.

Отметим еще, что если C — середина отрезка AB, то $(A, B, C)=1$.

Проследите, как изменяется (A, B, C), когда точка C перемещается по прямой AB, например двигается по отрезку AB от точки A к точке B.

Убедитесь, что величина (A, B, C) принимает все действительные значения и имеет место следующее утверждение: положение точки C ($C \neq B$) на прямой AB однозначно определяется заданными точками A, B и значением (A, B, C).

43.3. Неподвижные точки аффинных преобразований

Утверждения о множестве неподвижных точек аффинного преобразования (плоскости или пространства) почти дословно повторяют аналогичные утверждения из п. 40.1 о множестве неподвижных точек движения (надо лишь заменить слово «движение» словами «аффинное преобразование»). Перечислим эти утверждения.

1) *Аффинное преобразование неподвижных точек может не иметь* (например, перенос).

2) *Аффинное преобразование может иметь единственную неподвижную точку* (например, центральная симметрия).

3) *Если аффинное преобразование φ имеет две неподвижные точки A и B, то любая точка прямой AB является неподвижной точкой преобразования φ.*

Доказательство. Возьмем любую точку C прямой AB, отличную от B, и покажем, что $\varphi(C)=C$. Так как $\varphi(A)=A$ и $\varphi(B)=B$, то $\varphi((AB))=(AB)$ (по свойству 1). Поэтому $\varphi(C) \in (AB)$. Далее согласно свойству 7, $(A, B, C)=(\varphi(A); \varphi(B), \varphi(C))$, т. е. $(A; B; C)=(A, B; \varphi(C))$. Отсюда следует, что $\varphi(C)=C$. ■

4) *Если аффинное преобразование φ имеет три неподвижные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, то любая точка плоскости, проходящей через эти три точки, является неподвижной точкой данного преобразования.*

Доказательство. Согласно предыдущему утверждению, все точки прямых (AB), (AC), (BC) являются неподвижными точками преобразования φ. Возьмем любую точку $X \in (ABC)$, $X \neq A$ и покажем, что $\varphi(X)=X$. Проведем через X любую прямую, пересекающую прямые AB и AC соответственно в точках Y и Z. Так как $\varphi(Y)=Y$, $\varphi(Z)=Z$ и $X \in (YZ)$, то $\varphi(X)=X$. ■

Докажите самостоятельно последнее утверждение о неподвижных точках аффинных преобразований.

5) *Если аффинное преобразование имеет неподвижными четыре точки, не лежащие в одной плоскости, то это преобразование является тождественным преобразованием пространства.*

43.4. Теоремы о задании аффинных преобразований

Теорема 40.1, *а* (см. п. 40.3) говорит о том, что движение пространства (когда известен его род) однозначно определится тремя парами соответствующих точек A и A', B и B', C и C', если, кроме того, A, B, C, а также и A', B', C' не лежат на одной прямой и $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

В условии соответствующей теоремы о движении плоскости задаются два равных отрезка AB и $A'B'$.

В аналогичных теоремах о задании аффинных преобразований число точек возрастает на единицу, но зато отпадают требования о равенстве отрезков. Сформулируем и докажем эти теоремы.

Теорема 43.1

Если в плоскости α заданы два треугольника ABC и $A'B'C'$, то существует такое единственное аффинное преобразование φ плоскости α, которое переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$, т. е. $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$.

Доказательство. С у щ е с т в о в а н и е. Введем в плоскости α две аффинные системы координат: первую (A, e) с базисными векторами $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ и началом в точке A, а вторую (A', f) с базисными векторами $\vec{f}_1 = \overrightarrow{A'B'}$, $\vec{f}_2 = \overrightarrow{A'C'}$ и началом в точке A' (рис. 300). Отображение φ плоскости α зададим так: каждой точке M с координатами x, y в системе (A, e) ставим в соответствие точку M' с такими же координатами x, y

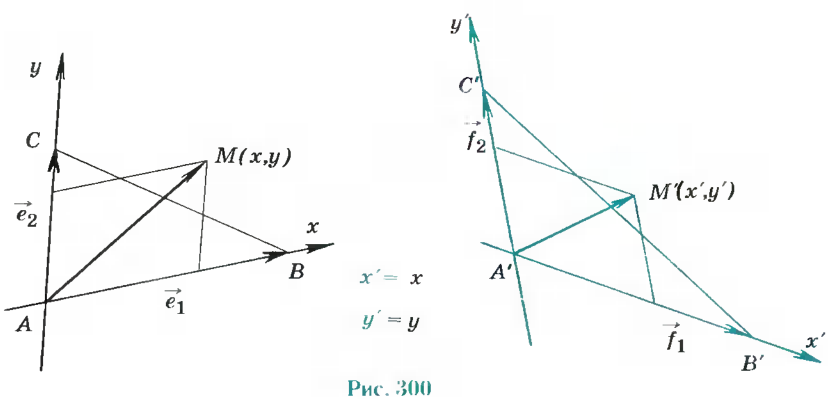


Рис. 300

в системе (A', f). Согласно определению аффинного преобразования, отображение φ является аффинным преобразованием плоскости α.

Единственность. Допустим, что аффинное преобразование ψ плоскости α также переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. Тогда аффинное преобразование $\psi^{-1}\circ\varphi$ имеет точки A, B, C своими неподвижными точками (проверьте это!). Поэтому, согласно утверждению 4 п. 43.3, отображение $\psi^{-1}\circ\varphi$ тождественное. А это и означает, что $\psi=\varphi$, т. е. φ — единственное аффинное преобразование плоскости α, переводящее треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$.

Для пространства теорема о задании аффинного преобразования звучит так:

Теорема 43.2

Если заданы два тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$, то существует единственное аффинное преобразование φ пространства, которое переводит тетраэдр $ABCD$ в тетраэдр $A'B'C'D'$, т. е. такое, что $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$, $\varphi(C)=C'$, $\varphi(D)=D'$.

Доказательство этой теоремы проведите самостоятельно. Оно вполне аналогично доказательству теоремы 43.1.

43.5. Метод аффинных преобразований

Теоремы 43.1 и 43.2 позволяют упростить доказательства теорем и решение задач, в которых речь идет о свойствах фигур, сохраняющихся при аффинных преобразованиях (их называют аффинными свойствами). Это упрощение достигается тем, что рассматриваемая фигура (например, треугольник) аффинным преобразованием переводится в более простую фигуру (например, в правильный треугольник).

Затем доказательство требуемого утверждения проводится для этой более простой фигуры. Но, поскольку в нем речь идет об аффинных свойствах, оно справедливо и для общего случая.

Проиллюстрируем этот общий признак таким примером.

Задача

Доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения ее боковых сторон лежат на одной прямой.

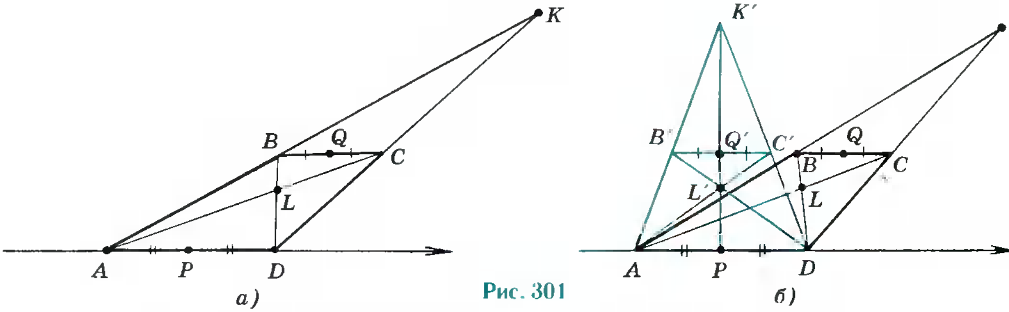


Рис. 301

Решение. Пусть продолжения боковых сторон AB и DC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K, диагонали AC и BD пересекаются в точке L, а точки P и Q — середины оснований AD и BC (рис. 301, *а*). Переведем треугольник AKD в равнобедренный треугольник $AK'D$ (например, сдвигом вдоль прямой AD, рис. 301, *б*). Для равнобедренной трапеции $AB'C'D$ утверждение задачи почти очевидно (объясните почему), а значит, оно справедливо и для исходной трапеции $ABCD$. ■

Докажите этим методом теоремы о центрах масс треугольника и тетраэдра.

43.6. Классификация аффинных преобразований

В классификационных теоремах говорится о возможности представить любое аффинное отображение в виде композиции немногих простейших аффинных отображений, с которыми мы познакомились в п. 43.1.

Доказательство первой из этих теорем, по существу, содержится в решении задачи 22.1 о том, что любую достаточно вытянутую призму можно пересечь так, что в сечении получится треугольник любой формы, т. е. подобный любому наперед заданному треугольнику. Из этой задачи следует, что параллельным проектированием можно любой заданный треугольник перевести в треугольник, подобный любому другому заданному треугольнику (рис. 302).

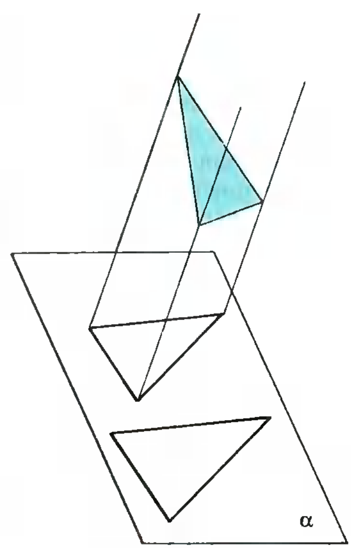


Рис. 302

Из этого утверждения следует такая теорема:

Теорема 43.3

Любое аффинное отображение плоскости на плоскость представимо в виде композиции движения плоскости в пространстве, параллельного проектирования и подобия.

Две другие аналогичные друг другу классификационные теоремы об аффинных преобразованиях плоскости и пространства опираются на следующую теорему:

Теорема 43.4

Для каждого аффинного преобразования плоскости (пространства) через каждую точку проходят две (три) взаимно перпендикулярные прямые, образы которых взаимно перпендикулярны.

Элементарные (но не простые) доказательства этой теоремы можно найти в учебниках для высшей школы (например, в кн.: Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия.— М.: Наука, 1990; Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Франгулов С. А. Геометрия.— СПб.: Спецлитература, 1997.— Ч. 1).

Используя теорему 43.4, уже легко доказать такую классификационную теорему:

Теорема 43.5

Каждое аффинное преобразование плоскости (пространства) представимо в виде композиции движения и сжатий к двум (трем) взаимно перпендикулярным прямым (плоскостям).

Из этой теоремы следует, что образом окружности при аффинном преобразовании является эллипс (рис. 303).

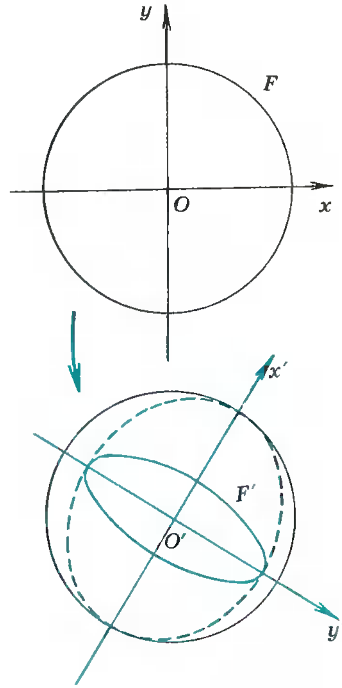


Рис. 303

43.7. Изменение площадей и объемов при аффинных преобразованиях

Из теорем п. 43.4 ясно, что при аффинных преобразованиях площади и объемы, вообще говоря, изменяются. Но из теорем п. 43.6 следует, что отношение площадей (объемов) образа фигуры и площади (объема) исходной фигуры при аффинном преобразовании не зависит от выбранной фигуры, а зависит лишь от самого аффинного преобразования φ. Формулами это можно выразить так:

$$S(\varphi(F))=k(\varphi)\,S(F) \qquad (43.1)$$

и

$$V(\varphi(F))=k(\varphi)\,V(F). \qquad (43.2)$$

Из формул (43.1) и (43.2) вытекает, что для любых различных фигур F и G имеют место равенства

$$\frac{S(\varphi(F))}{S(\varphi(G))} = \frac{S(F)}{S(G)} \qquad (43.3)$$

и

$$\frac{V(\varphi(F))}{V(\varphi(G))} = \frac{V(F)}{V(G)}. \qquad (43.4)$$

Эти равенства говорят о том, что при аффинных преобразованиях сохраняются отношения площадей и объемов.

Коэффициент $k(\varphi)$ можно определить из теоремы 43.5: он будет равен произведению коэффициентов сжатий, о которых речь идет в этой теореме (рис. 304). Для аффинного отображения плоскости число $k(\varphi)$ можно найти и из теоремы 43.3: оно будет равно произведению коэффициента подобия на косинус угла между плоскостями (имеются в виду подобие и плоскости, о которых говорится в условии этой теоремы).

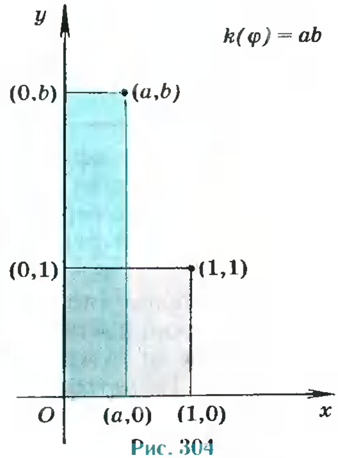


Рис. 304

§ 44*. Проективные преобразования

44.1. Предварительные замечания

Проективная геометрия, как и большинство других разделов геометрии, возникла из-за необходимости решать практические задачи. Проективную геометрию породили задачи живописи, архитектуры, географии и т. д. Возраст одних из этих задач — многие тысячи лет (задачи, связанные с изображением пространственных фигур на плоскости), другие же возникли совсем недавно (задачи, связанные с аэрофотосъемкой и фотосъемкой со спутников).

Рассказ о проективной геометрии мы уже начали в дополнении к § 19, где говорилось о центральном проектировании и где была доказана одна из основных теорем проективной геометрии — теорема Дезарга.

Напомним, что **проективными** называют такие свойства фигур, которые сохраняются при центральных проектированиях (рис. 305). А **проективными преобразованиями** можно назвать композиции конечного числа центральных проектирований. Это определение требует уточнений, связанных с необходимостью пополнения евклидовых прямых и плоскостей. Мы сделаем эти уточнения позднее, а вначале мы изучим проективные свойства прямой.

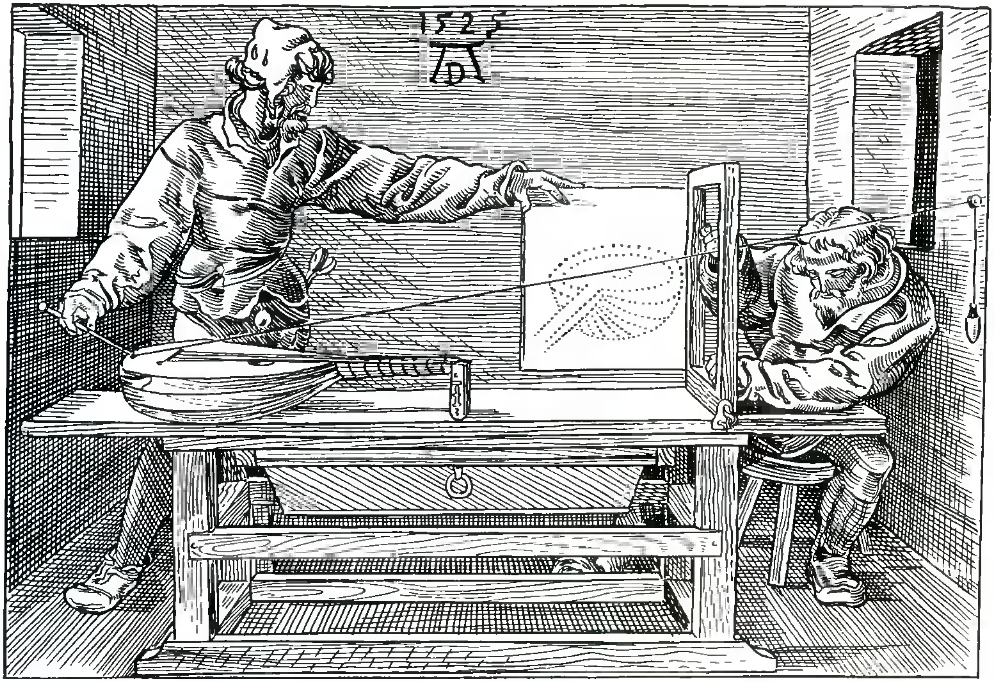


Рис. 305

44.2. Проективные свойства прямой. Сложное отношение четырех точек

Ясно, что центральное проектирование не сохраняет отношение двух коллинеарных отрезков (рис. 306), т. е. простое отношение трех коллинеарных точек. Но оказывается, что при центральном проектировании не изменится отношение двух простых отношений четырех коллинеарных точек. Докажем следующую теорему:

Теорема 44.1

Пусть четыре различные точки K, L, M, N прямой q получены центральным проектированием из точки O соответственно точек A, B, C, D прямой p (рис. 307). Тогда

$$\frac{(K,\ L,\ M)}{(K,\ L,\ N)} = \frac{(A,\ B,\ C)}{(A,\ B,\ D)}. \qquad (44.1)$$

Доказательство. Обозначим через a, b, c, d прямые OA, OB, OC, OD соответственно. Левая часть равенства

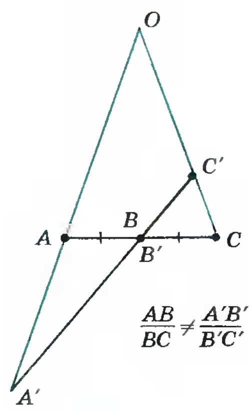


Рис. 306

(44.1) через отношения направленных отрезков вычисляется так:

$$\frac{(K, L, M)}{(K, L, N)} = \frac{KM}{ML} : \frac{KN}{NL}. \qquad (44.2)$$

Аналогично для правой части равенства (44.1) имеем

$$\frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}. \qquad (44.3)$$

Так как треугольники OKM, OML, OKN, ONL имеют одну и ту же высоту из вершины O на прямую q, то

$$\frac{KM}{ML} = \frac{S(\Delta OKM)}{S(\Delta OML)} \text{ и } \frac{KN}{NL} = \frac{S(\Delta OKN)}{S(\Delta ONL)}, \qquad (44.4)$$

где отношение площадей, как и отношение отрезков, берется с соответствующим знаком.

Площади этих треугольников можно выразить и через синусы углов между прямыми a, b, c, d. Тогда имеем

$$\frac{S(\Delta OKM)}{S(\Delta OML)} = \frac{OK \cdot \sin\angle ac}{OL \cdot \sin\angle cb}$$

и $\qquad (44.5)$

$$\frac{S(\Delta OKN)}{S(\Delta ONL)} = \frac{OK \cdot \sin\angle ad}{OL \cdot \sin\angle db},$$

где углы, как и отрезки, считаются ориентированными, а потому синусы имеют соответствующие знаки.

Из (44.2), (44.4) и (44.5) следует, что

$$\frac{(K, L, M)}{(K, L, N)} = \frac{\sin\angle ac}{\sin\angle cb} : \frac{\sin\angle ad}{\sin\angle db}. \qquad (44.6)$$

Повторив эти выводы для треугольников OAC, OCB, OAD, ODB, получим, что

$$\frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{\sin\angle ac}{\sin\angle cb} : \frac{\sin\angle ad}{\sin\angle db}. \qquad (44.7)$$

Из равенств (44.6) и (44.7) следует теорема (44.1). ■

Число $\frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}$ называют **сложным** (или **двойным**) **отношением четырех коллинеарных точек** A, B, C, D и обозначают так: $(A, B; C, D)$.

Теорему 44.1 мы можем теперь сформулировать так:

Теорема 44.1, а *(об инвариантности сложного отношения)*

Сложное отношение четырех точек не меняется при проективных преобразованиях.

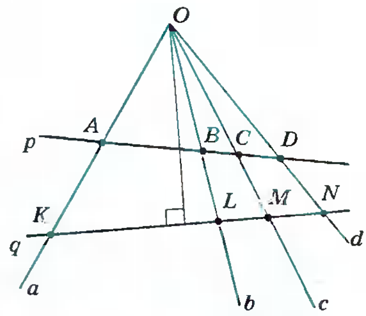


Рис. 307

Равенства (44.6) и (44.7) позволяют расширить понятие сложного отношения в двух направлениях.

Во-первых, они дают основание ввести понятие сложного отношения в пучке прямых, проходящих через точку O, равенством

$$(a,\ b;\ c,\ d)=\frac{\sin\angle ac}{\sin\angle cb}:\frac{\sin\angle ad}{\sin\angle db}. \qquad (44.8)$$

Во-вторых, проектируя точки A, B, C, D прямой p из точки O на прямую q, мы можем получить и бесконечно удаленную точку прямой q (например, ею становится точка N, если $OD\|q$, рис. 308).

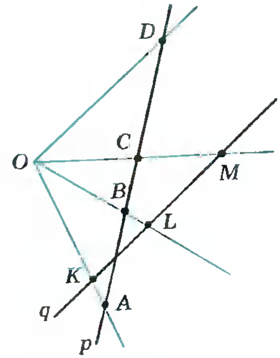


Рис. 308

Равенство (44.8) позволяет расширить понятие о сложном отношении четырех точек и на этот случай, полагая, что по определению

$$(A,\ B;\ C,\ D)=(K,\ L;\ M,\ N)=(a,\ b;\ c,\ d). \qquad (44.9)$$

Далее, говоря «прямая», мы будем иметь в виду проективную прямую, т. е. евклидову прямую, пополненную бесконечно удаленной точкой.

Проверьте, что сложное отношение четырех точек обладает такими свойствами:

$$(A,\ B;\ C,\ D)=(C,\ D;\ A,\ B), \qquad (44.10)$$

$$(A,\ B;\ C,\ D)=\frac{1}{(A,\ B;\ D,\ C)}, \qquad (44.11)$$

$$(A,\ B;\ K,\ L)=(A,\ B;\ K,\ M)\cdot(A,\ B;\ M,\ L). \qquad (44.12)$$

Если зафиксировать на прямой p три произвольные точки A, B, C, то положение четвертой точки D на этой прямой однозначно определится значением сложного отношения $(A,\ B;\ C,\ D)$.

Действительно, если положить $(A,\ B;\ C,\ D)=x$, $(A,\ B;\ C)=y$, то $(A,\ B;\ D)=\frac{y}{x}$. А как мы уже знаем, положение точки D при заданных точках A, B и заданном значении $(A,\ B,\ D)$ определяется на прямой AB однозначно.

И мы теперь понимаем, что верное перспективное (т. е. полученное центральным проектированием) изображение даже простого коллинеарного ряда равноотстоящих точек (например, шпал между рельсами или телеграфных столбов) не может быть произвольным, а должно удовлетворять необходимым числовым соотношениям, поскольку сложные отношения любой четверки точек из этого ряда вполне определены их номером в этом ряду (рис. 309).

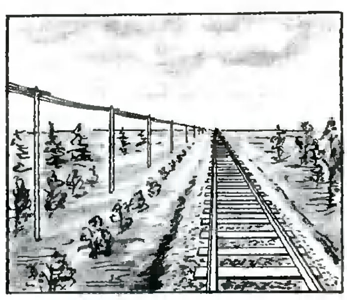


Рис. 309

Законы перспективы трехмерных объектов, конечно, сложнее, но в основе их лежит инвариантность сложного отношения четырех точек при центральном проектировании.

44.3. Проективные преобразования прямой

В п. 44.1 мы определили проективное преобразование как композицию центральных проектирований. Из теоремы 44.1, *а* следует, что проективные преобразования сохраняют сложные отношения четырех точек. Это свойство характеризует проективные преобразования. А именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 44.2

Преобразования проективной прямой, сохраняющие сложное отношение любой четверки точек, являются проективными преобразованиями.

Доказательство теоремы 44.2 опирается на две леммы.

Лемма 44.1

Для любых двух троек различных точек A, B, C и A', B', C' прямой существует единственное обратимое преобразование f этой прямой, которое сохраняет сложное отношение четырех точек.

Доказательство. Возьмем любую точку $X \in p$ и найдем число $x=(A, B; C, X)$. По этому числу и тройке точек A', B', C' построим такую точку X', что $(A', B'; C', X')=(A, B; C, X)$. Отображение f определим, полагая, что $X'=f(X)$. Так как по значению $(A, B; C, X)$ точка X' строится однозначно, то f — единственное преобразование, удовлетворяющее условию леммы. ■

Лемма 44.2

Пусть на прямых p и q задано по тройке точек: A, B, C на прямой p и A', B', C' на прямой q. Тогда композицией двух центральных проектирований тройку A, B, C можно перевести в тройку A', B', C'.

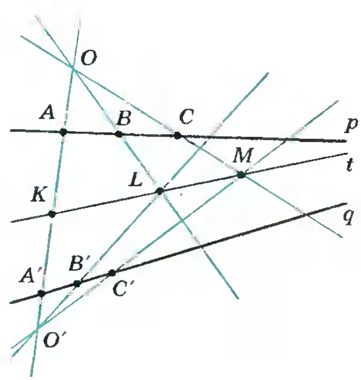


Рис. 310

Доказательство. На прямой AA' возьмем любые две точки O и O' вне прямых p и q и проведем прямые OB, OC, $O'B'$, $O'C'$ (рис. 310). Пусть прямые OB и

$O'B'$ пересекаются в точке L, а прямые OC и $O'C'$ — в точке M. Проведем через L и M прямую t и обозначим через K точку пересечения прямых t и AA'. Точки A, B, C проектируются из точки O в точки K, L, M, а точки K, L, M проектируются из точки O' в точки A', B', C'. Отсюда и следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 44.2. Пусть преобразование f прямой p сохраняет сложное отношение. Возьмем на прямой p любые три точки A, B, C, и пусть $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$. Проведем любую прямую q и из точки O, взятой вне прямых p и q, спроектируем точки A, B, C в точки K, L, M прямой q. Согласно лемме 44.2, точки K, L, M композицией двух центральных проектирований можно перевести в точки A', B', C'. Поэтому композицией трех центральных проектирований точки A, B, C переводятся в точки A', B', C'. Эта композиция в силу теоремы 44.1 сохраняет сложное отношение. Следовательно, по лемме 44.1 она совпадает с преобразованием f. А это и значит, что f — проективное преобразование прямой p. ■

Из теоремы 44.2 и леммы 44.1 вытекает следующая основная теорема о проективных преобразованиях прямой:

Теорема 44.3

Если на прямой p заданы две тройки точек A, B, C и A', B', C', то существует единственное проективное преобразование f прямой p, такое, что $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$.

Следствие. Проективное преобразование p, имеющее три неподвижные точки, тождественное.

44.4. Проективная плоскость. Принцип двойственности

Каждую прямую мы уже пополнили бесконечно удаленной точкой. При этом мы полагаем, что параллельные (в евклидовом смысле) прямые пересекаются (в проективном смысле) в их бесконечно удаленной точке (рис. 311). Тем самым считаем, что пучок параллельных (в евклидовом смысле) прямых в некоторой плоскости α проходит через одну бесконечно удаленную точку этой плоскости (рис. 312, *а*). И с точки зрения проективной геометрии этот пучок имеет такие же свойства, как и пучок прямых, проходящих через одну обычную точку

Рис. 311

(рис. 312, *б*). Напомним, что центральное проектирование переводит такие пучки друг в друга (рис. 312, *в*).

Пополнив каждый пучок параллельных прямых в некоторой плоскости α бесконечно удаленной точкой, мы пополнили теперь плоскость α бесконечно удаленной прямой, которая и состоит из этих бесконечно удаленных точек. Такую плоскость, пополненную бесконечно удаленными элементами (бесконечно удаленными точками и бесконечно удаленной прямой), назовем **проективной плоскостью.** Слова «бесконечно удаленная» мы сокращаем и пишем «б. уд.». Бесконечно удаленные элементы называют также **несобственными элементами**.

Благодаря такому пополнению центральное проектирование становится обратимым отображением проективной плоскости α на проективную плоскость α' (рис. 313): на этом рисунке образом б. уд. прямой плоскости α на плоскости α' является прямая b, а прообразом б. уд. прямой плоскости α' в плоскости α является прямая c.

Для проективной плоскости справедливы два следующих предложения.

Предложение 1. ***На проективной плоскости через каждые две точки проходит прямая и притом только одна.***

Это предложение верно и для евклидовой плоскости.

Предложение 2. ***На проективной плоскости каждые две прямые пересекаются в некоторой точке.***

На евклидовой плоскости это предложение не выполняется.

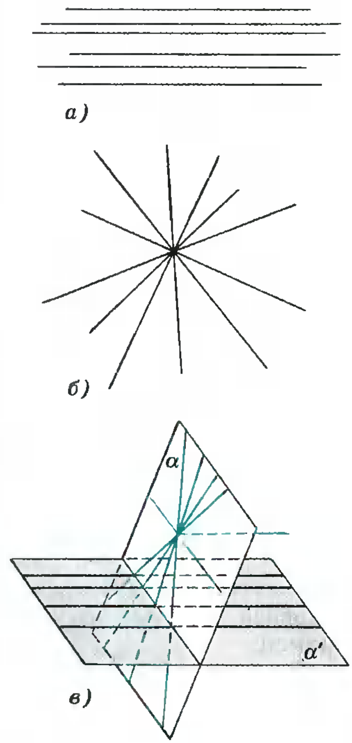


Рис. 312

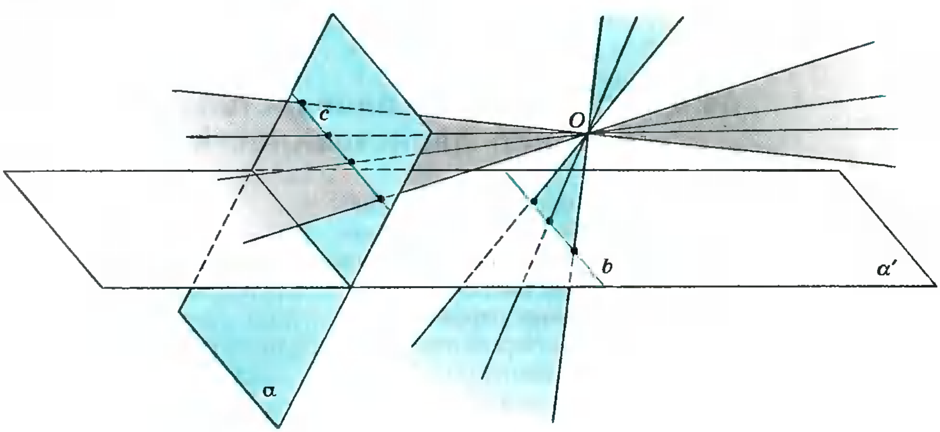


Рис. 313

Докажите эти утверждения и проиллюстрируйте их на пополненной евклидовой плоскости.

Отношения «точка принадлежит прямой» и «прямая проходит через точку» объединяют словами «точка и прямая инцидентны». В этой терминологии предложения 1 и 2 звучат так: 1) каждым двум точкам инцидентна единственная прямая; 2) каждым двум прямым инцидентна единственная точка. Они получаются друг из друга заменой в каждом из них слова «прямая» на слово «точка» и наоборот. Говорят, что эти предложения **двойственны друг другу**.

Все дальнейшие понятия и теоремы проективной геометрии на проективной плоскости выражаются в конечном счете через отношение инцидентности прямой и точки. И благодаря симметричности этого отношения, выраженной в предложениях 1 и 2, каждому понятию и теореме проективной геометрии на плоскости соответствует **двойственное понятие и теорема:** они получаются из исходных заменами друг на друга слов «точка» и «прямая». Таким образом, все утверждения проективной геометрии распадаются на пары двойственных утверждений. И если одна из двойственных теорем доказана, то вторая уже в доказательстве не нуждается благодаря двойственности предложений 1 и 2. В этом и состоит **принцип двойственности** для проективной плоскости.

Хорошую иллюстрацию принципа двойственности дает теорема Дезарга. Сформулируйте ее в терминах инцидентности точек и прямых (рис. 314), сформулируйте двойственную ей теорему и убедитесь, что эта теорема окажется обратной теореме Дезарга.

В силу принципа двойственности мы можем утверждать, что верна и теорема, обратная теореме Дезарга: отдельного доказательства не нужно.

Еще одна иллюстрация принципа двойственности: множество (ряд) точек, лежащих на одной прямой, и множество (пучок) прямых в плоскости, проходящих через одну точку (рис. 315).

В заключение отметим, что в евклидовой планиметрии принцип двойственности несправедлив, так как неверно предложение 2.

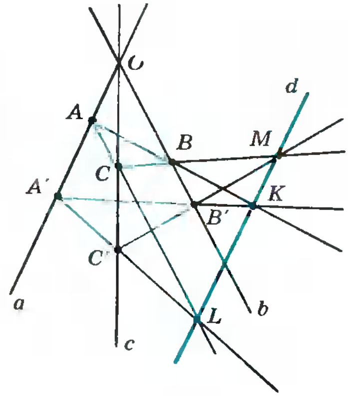


Рис. 314

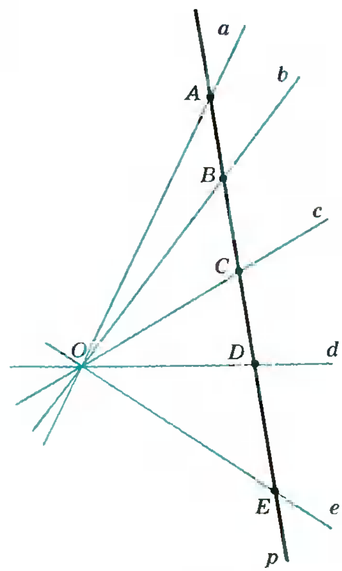


Рис. 315

44.5. Модель проективной плоскости

Оперировать на проективной плоскости, полученной пополнением евклидовой плоскости, с элементами различной природы — обыкновенными (собственными) и бесконечно удаленными (несобственными) не очень удобно. Удобнее рассматривать модель проективной плоскости, в которой все элементы равноправны.

Фиксируем в пространстве некоторую плоскость α, которую считаем проективной плоскостью, пополненной бесконечно удаленными элементами, а также точку O вне плоскости α (рис. 316).

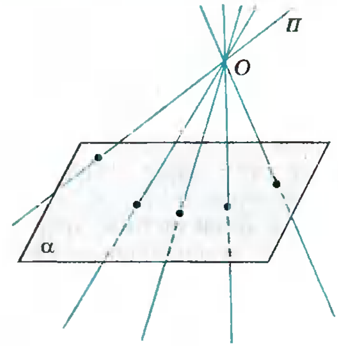
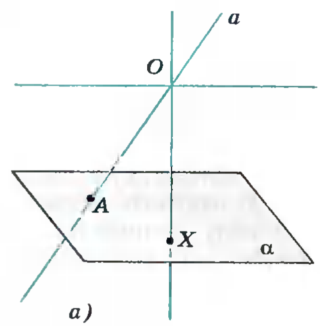


Рис. 316

Множество всех прямых, проходящих через точку O, называется **связкой прямых с центром O**; обозначим его через П. Между точками проективной плоскости α и прямыми связки П естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие: точке $X \in \alpha$ соответствует прямая OX, а любой прямой $a \in П$ соответствует точка A, в которой прямая a пересекает плоскость α (рис. 317, *а*). Прямые связки П, параллельные плоскости α, тоже пересекают ее, но в бесконечно удаленных точках.

Установленное взаимно однозначное соответствие между точками проективной плоскости α и прямыми связки П позволяет рассматривать связку П как модель проективной плоскости, а иногда говорят даже, что П — проективная плоскость. (Мы тоже будем часто так говорить.) Прямые связки при этом считают точками плоскости П. При таком взгляде строение самих этих прямых в евклидовом пространстве не играет роли. Выступая как точки плоскости П, они становятся тем, что по определению Евклида «не имеет частей». Каждая из них фигурирует как нечто целое. Такой взгляд служит прекрасной иллюстрацией отвлеченного понимания геометрии, когда она, как говорится в «Основаниях геометрии» Д. Гильберта (см. ниже, п. 46.6), относится к «объектам произвольной природы». В данном случае роль точек проективной плоскости играют прямые связки в евклидовом пространстве.

Роль прямых проективной плоскости П играют плоскости в евклидовом пространстве, проходящие через точку O (рис. 317, *б*). Та плоскость β, которая содержит точку O и параллельна плоскости α, соответствует бесконечно удаленной прямой плоскости α. Остальные плоскости, проходящие через O, пересекают α по собственным прямым и соответствуют им. Предложениями 1 и 2 п. 44.4 в построенной модели являются следующие предложения евклидовой стереометрии:



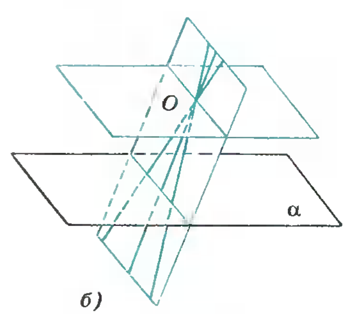
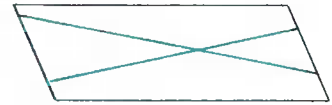


Рис. 317

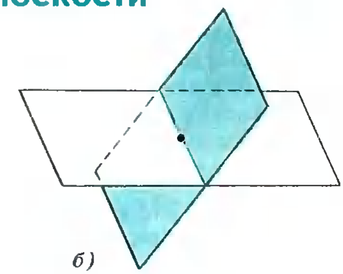
1) *Через любые две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна* (рис. 318, *а*).

2) *Две плоскости, имеющие общую точку, пересекаются по прямой* (рис. 318, *б*).



а)

44.6. Проективные преобразования плоскости



б)

Рис. 318

В п. 44.1 мы назвали проективными те преобразования, которые являются композицией конечного числа центральных проектирований (параллельное проектирование можно считать частным случаем центрального, центр которого находится в бесконечно удаленной точке). Центральные проектирования проективных плоскостей (т. е. евклидовых плоскостей, пополненных несобственными элементами) обратимы и обладают следующими двумя свойствами: во-первых, они прямые переводят в прямые и, во-вторых, они сохраняют сложное отношение любых четырех коллинеарных точек. Этими двумя свойствами будут обладать и проективные преобразования как композиции центральных проектирований. Более того, для проективных преобразований проективной плоскости эти свойства являются характеристическими. Мы остановимся на первом из них.

Итак, **проективным преобразованием проективной плоскости** назовем ее обратимое преобразование, переводящее прямые в прямые. Отметим, что аффинное преобразование плоскости тоже можно определить как обратимое преобразование евклидовой (!) плоскости, переводящее прямые в прямые.

Основная теорема о проективном преобразовании плоскости формулируется так:

Теорема 44.4

Если на проективной плоскости П заданы две четверки точек A, B, C, D и A', B', C', D', в каждой из которых никакие три точки не лежат на одной прямой, то существует единственное проективное преобразование f плоскости П, такое, что $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$ и $f(D)=D'$.

Доказательство. Существование. Проективную плоскость П будем представлять как связку прямых в пространстве, проходящих через точку O. Тогда точки A, B, C, D и A', B', C', D' — это прямые в этой связке (рис. 319).

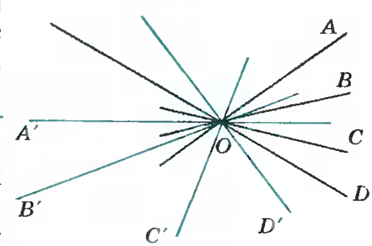


Рис. 319

Возьмем на евклидовой прямой D точку $M \neq O$ и построим параллелепипед P с диагональю OM и тройкой ребер OM_1, OM_2, OM_3 на евклидовых прямых A, B, C соответственно (рис. 320). Затем возьмем на евклидовой прямой D' точку $M' \neq O$ и построим параллелепипед P' с диагональю OM' и тройкой ребер OM_1', OM_2', OM_3', лежащих на прямых A', B', C' соответственно. Так как по условию теоремы никакие три прямые из заданных четверок не лежат на одной прямой, то параллелепипеды P и P' не вырождаются в плоские многоугольники или отрезки.

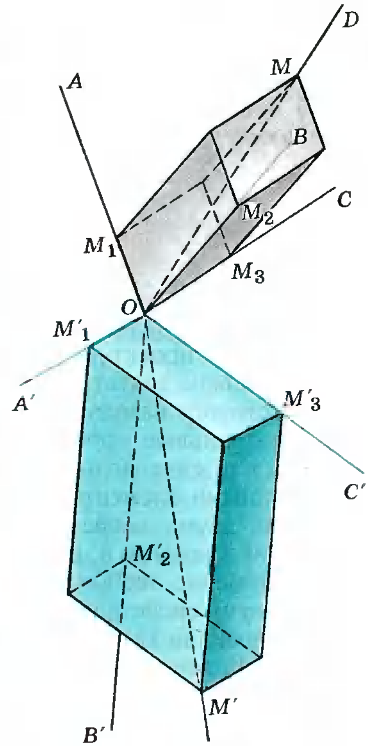


Рис. 320

Согласно теореме 43.2 п. 43.4, существует аффинное преобразование f евклидова пространства, которое тетраэдр $OM_1M_2M_3$ переводит в тетраэдр $OM_1'M_2'M_3'$. Это преобразование f переводит также параллелепипед P в параллелепипед P', т. е. является таким преобразованием, что $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$ и $f(D)=D'$. Плоскости, проходящие через точку O, преобразование f переводят в плоскости, проходящие через эту же точку O. Поэтому в проективной плоскости Π преобразование f переводит прямые в прямые, а потому является искомым проективным преобразованием плоскости Π.

Единственность. Допустим, что, кроме построенного нами преобразования f, существует еще проективное преобразование g, удовлетворяющее условию теоремы. Покажем, что $g=f$. Стандартный метод, позволяющий доказать это равенство, состоит в том, что рассматривают преобразование $g^{-1} \circ f$. Равенство $g=f$ равносильно тождественности преобразования $g^{-1} \circ f$. А то, что преобразование $g^{-1} \circ f$ тождественное, доказывают, устанавливая, что неподвижными точками для $g^{-1} \circ f$ являются любые точки прямой, плоскости и т. д. Так мы уже поступали, рассматривая движения и аффинные преобразования. В данной теореме мы уже имеем четыре неподвижные точки A, B, C, D преобразования $\varphi = g^{-1} \circ f$. Поэтому φ переводит в себя любую из шести прямых, проходящих через пары точек (A, B), (A, C) и т. д. (рис. 321). Говорят, что эти прямые **инвариантны для преобразования** φ. Точки пересечения любых двух инвариантных прямых также будут инвариантны для φ, т. е. являются неподвижными точками преобразования φ. Следовательно, мы можем утверждать, что неподвижными для φ будут уже все 15 точек пересечения этих шести инвариантных прямых.

Далее, оказываются инвариантными относительно φ уже 105 прямых, проходящих через пары из 15 неподвижных точек. Поэтому можно утверждать, что неподвижны точки пересечения этих 105 инвариантных прямых. Число таких точек равно $105 \cdot 52 = 5460$.

Продолжая эти рассуждения, мы убедимся, что плоскость П покрыта всюду плотным множеством неподвижных точек. (Говорят, что множество «всюду плотно», если его точки содержатся в любой окрестности.)

Используя непрерывность преобразования φ, можно утверждать, что любая точка плоскости П является неподвижной точкой преобразования φ. Поэтому преобразование φ — тождественное, т. е. $g=f$. ■

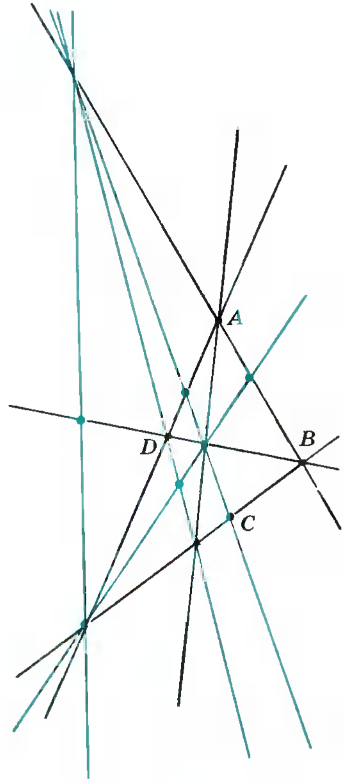


Рис. 321

Замечание 1. Обратите внимание, что движение на плоскости (род которого известен) задается двумя парами соответствующих точек, аффинное преобразование — двумя тройками соответствующих точек, не лежащих на одной прямой, а проективное преобразование — уже двумя четверками точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Замечание 2. Интересно, что любое проективное преобразование проективной плоскости всегда имеет хотя бы одну неподвижную точку. А из теоремы 44.4 следует, что *проективное преобразование проективной плоскости, имеющее четыре неподвижные точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, является тождественным преобразованием.*

(Подумайте над случаями, когда у проективного преобразования проективной плоскости имеются две или три неподвижные точки.)

44.7. Классификация проективных преобразований плоскости

Так как аффинные преобразования плоскости переводят прямые в прямые, то аффинные преобразования (в частности, движения) являются проективными преобразованиями. О классификации аффинных преобразований мы говорили в п. 43.6. Любое проективное преобразование плоскости, отличное от аффинного преобразования, теорема 44.4 позволяет свести фактически к однократному центральному проектированию. Это означает следующее.

Пусть задано некоторое проективное преобразование f проективной плоскости, не являющееся аффинным. Возьмем два экземпляра этой плоскости, считая их плоскостями α и β в евклидовом пространстве, пополненными б. уд. элементами. Точки X плоскости α считаем множеством определения (задания) преобразования f, а точками $Y=f(X)$ считаем точки плоскости β. На плоскости α можно взять любые четыре точки A, B, C, D, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Им в плоскости β соответствуют точки $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$ и $D'=f(D)$. Оказывается, что плоскости α и β можно так расположить в пространстве, что центральным проектированием из некоторой точки O точки A, B, C, D проектируются в точки A', B', C', D' (рис. 322). Из утверждения единственности теоремы 44.4 следует, что для любой точки $X \in \alpha$ соответствующая ей точка $Y=f(X)$ плоскости β лежит на прямой OX, т. е. получается центральным проектированием из точки O.

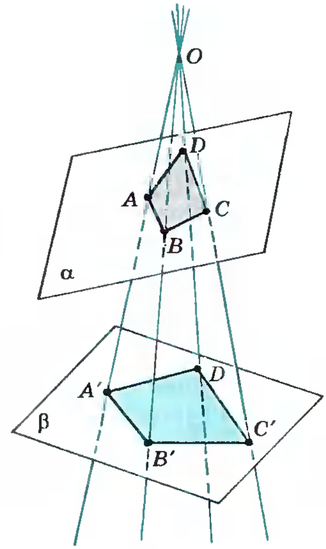


Рис. 322

Таким образом, *любое проективное преобразование плоскости, не являющееся аффинным, сводится к композиции движения одного из экземпляров этой плоскости в пространстве и центрального проектирования этого экземпляра на второй экземпляр рассматриваемой проективной плоскости.*

Именно это теоретическое положение лежит в основе устройства прибора для оптического трансформирования фотоснимков, полученных с самолетов или со спутников.

§ 45*. Теоретико-групповой подход к геометрии

45.1. Группа преобразований множества

Изучая различные преобразования фигур, вы, наверное, обратили внимание на то, что в каждом классе преобразований мы интересовались, во-первых, вопросом о том, будет ли композиция двух преобразований рассматриваемого класса тоже преобразованием из этого класса и, во-вторых, относится ли к тому же классу преобразование, обратное для преобразования данного класса.

Эти вопросы были решены положительно для движений, подобий, аффинных и проективных преобразований, для преобразований симметрии фигуры.

Множество всех преобразований симметрии некоторой фигуры мы уже назвали в п. 42.2 группой симметрии фигуры. Если фигура является плоскостью или пространством, то ее группа симметрии — это группа движений плоскости или пространства.

В общем случае группа преобразований некоторого множества определяется так.

Пусть M — некоторое множество и G — некоторое множество (некоторый класс) обратимых преобразований множества M. Говорят, что G является **группой преобразований множества** M, если выполняются два условия:

1) для любых двух преобразований f и g из G их композиция также является элементом множества G;

2) для любого преобразования $f \in G$ обратное ему преобразование f^{-1} также является элементом G.

Из определения группы преобразований следует, что тождественное преобразование e является элементом любой группы преобразований, так как $f^{-1} \circ f = e$.

Минимальной по числу элементов является группа преобразований, состоящая лишь из тождественного преобразования. Эту группу называют **тривиальной**.

Напротив, максимальной для множества является группа **всех** его обратимых преобразований.

45.2. Геометрия группы преобразований

Нам уже знакомы многие группы преобразований плоскости или пространства: группы движений и подобий, аффинных и проективных преобразований, группы поворотов и гомотетий с фиксированными центром или осью.

Свойства фигур, сохраняющиеся при преобразованиях той или иной группы, называют по имени соответствующей группы — аффинные свойства, проективные свойства. Свойства, сохраняющиеся при движениях, называют метрическими свойствами, а группу движений называют также группой **изометрий**. Теперь рассмотрим общий случай: некоторую группу преобразований G множества M.

Фигурами в множестве M будем называть подмножества множества M.

Инвариантами группы G будем называть свойства фигур, сохраняющиеся при любых преобразованиях из группы G.

Геометрией группы преобразований G **множества** M, следуя Феликсу Клейну (1849—1925), называют систему предложений об инвариантах группы G.

Две фигуры P и Q в множестве M назовем **G-конгруэнтными**, если в группе G найдется такое преобразование f, что $Q=f(P)$.

Из данных определений следует, что в геометрии группы G конгруэнтные фигуры обладают одинаковыми свойствами.

Проиллюстрируем эти определения для известных нам групп преобразований.

Инвариантами группы движений являются длины, углы, площади, объемы. Инвариантами группы подобий — углы, отношения отрезков, площадей, объемов, но не являются ее инвариантами длины отрезков.

Инвариантами аффинной группы являются простое отношение трех коллинеарных точек, параллельность прямых, отношения площадей и объемов, но не являются ее инвариантами отношения длин неколлинеарных отрезков.

Инвариантами проективной группы являются отношение инцидентности точек и прямых, сложное отношение четырех коллинеарных точек.

Если через один из инвариантов в некоторой группе G можно выразить остальные ее инварианты, то этот инвариант называют **основным** инвариантом группы G.

В группе движений основным инвариантом является длина отрезка, в аффинной группе — простое отношение трех коллинеарных точек, в проективной группе — сложное отношение четырех коллинеарных точек.

Относительно группы движений конгруэнтны треугольники, имеющие соответственно равные стороны, конгруэнтны окружности, имеющие равные радиусы, и т. п.

Аффинно-конгруэнтны уже все треугольники и все тетраэдры (это следует из теорем 43.1 и 43.2 п. 43.4), а также все эллипсы (это следует из теоремы 43.5 п. 43.6).

Проективно-конгруэнтны уже все четырехугольники (это вытекает из теоремы 44.4 п. 44.6). Кроме того, проективно-эквивалентны друг другу все эллипсы, гиперболы и параболы, так как они получаются друг из друга центральным проектированием (рис. 323).

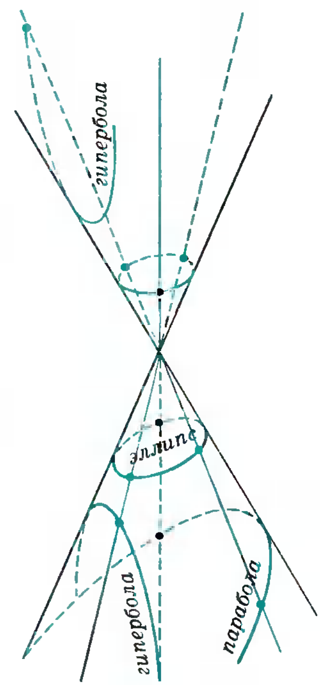


Рис. 323

45.3. «Эрлангенская программа» Ф. Клейна

Теоретико-групповой подход к геометрии как к геометрии некоторой группы преобразований был предложен немецким математиком Феликсом Клейном в лекции «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», прочитанной им в 1872 г. в университете баварского города Эрлангена. Эта лекция, получившая название «Эрлангенской программы», с одной стороны, подвела итог исследованиям различных неевклидовых геометрий, проведенным многими геометрами в XIX в., дала общий подход к этим геометриям: все они оказались геометриями некоторых подгрупп проективной группы, в том числе и «воображаемая геометрия» Лобачевского.

С другой стороны, «Эрлангенская программа» побудила математиков к изучению новых геометрий, которые уже рассматривались как геометрии различных групп преобразований. При этом сначала эти геометрии могут строиться чисто алгебраически как теории инвариантов групп аналитически заданных преобразований на некоторых числовых множествах. Затем же могло оказаться, что эти алгебраические теории инвариантов соответствуют геометриям, построенным аксиоматически. Именно таким путем сам Клейн в 1871 г. построил модель плоскости Лобачевского, опираясь на алгебраические исследования английского математика Артура Кэли (1821—1895). Позднее, уже в начале XX в., оказалось, что геометрия пространства Минковского — геометрической базы теории специальной теории относительности Эйнштейна (см. § 47) является геометрией группы преобразований Лоренца, рассмотренных ранее (в 1895 г.) нидерландским физиком и математиком Хендриком Лоренцем (1853—1928) в связи с его работами по теоретической физике.

45.4. Модель Кэли — Клейна плоскости Лобачевского

Модель, построенная Ф. Клейном в 1871 г., была первой моделью **всей** плоскости Лобачевского. (Модель А. Пуанкаре, о которой мы говорили в «Геометрии, 8—9», появилась позднее, в 1882 г.) Поскольку Ф. Клейн при построении плоскости Лобачевского опирался на алгебраические исследования А. Кэли, то обычно построенную Клейном модель называют моделью Кэли — Клейна. Она строится так.

Точками плоскости Лобачевского Λ считаются точки единичного открытого круга D на евклидовой плоскости, т. е. пары чисел (x, y), удовлетворяющие неравенству

$$x^2+y^2<1. \qquad (45.1)$$

Прямыми плоскости Лобачевского считаются хорды этого круга (рис. 324).

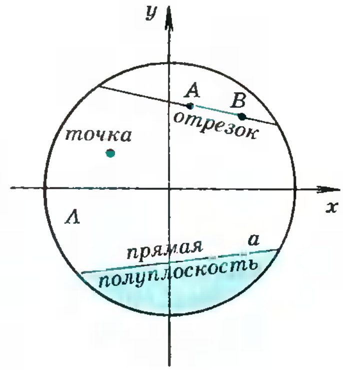


Рис. 324

Ясно, что в этой модели выполняются аксиомы принадлежности и порядка (см. дополнение к § 6), а также аксиома параллельности Лобачевского — отрицание аксиомы параллельности Евклида. Движениями в плоскости Λ (Λ-движениями) назовем преобразования, являющиеся композициями следующих преобразований круга D: 1) поворотов круга D вокруг его центра O; 2) симметрий относительно диаметров круга D; 3) преобразований, задаваемых формулами

$$x'=\frac{x\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta y},\quad y'=\frac{y+\beta}{1+\beta y},\quad \beta=\text{const},\ |\beta|<1. \qquad (45.2)$$

Эти преобразования образуют группу преобразований круга D, которую мы обозначим через H. На всей евклидовой плоскости, расширенной по проективной плоскости, преобразования группы H являются проективными преобразованиями, переводящими круг D в этот же круг D.

Достаточно просто можно проверить выполнимость аксиомы подвижности для плоскости Λ: если на Λ задать два луча l и l' и две прилегающие к ним полуплоскости α и α', то найдется такое Λ-движение, которое переводит луч l и полуплоскость α в луч l' и полуплоскость α' (рис. 325). Подумайте, как осуществить такое Λ-движение.

Осталось обсудить аксиомы расстояния. Расстояние $|AB|_\Lambda$ на плоскости Λ между двумя точками A и B вводится так. Через точки A и B в круге D проводится хорда PQ. Тогда число $|AB|_\Lambda$ определяется равенством

$$|AB|_\Lambda=k|\ln(A,\ B;\ P,\ Q)|,\ k=\text{const}>0. \qquad (45.3)$$

Так как преобразования из группы H являются проективными, то число $|AB|_\Lambda$ является инвариантом группы H. Выполнимость аксиом расстояния для величины $|AB|_\Lambda$ следует из свойств сложного отношения (см. п. 44.2). Но проверка их не проста. Ее можно найти в учебнике: Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Франгулов С. А. Геометрия. — СПб.: Спецлитература, 1997. —Ч. 2.

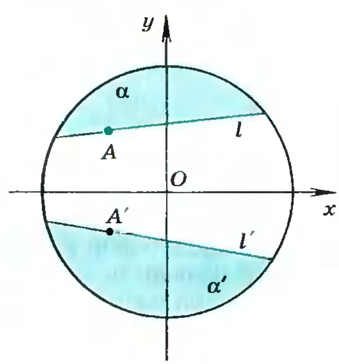


Рис. 325

Таков общий план построения модели Кэли — Клейна при аксиоматическом построении геометрии Лобачевского. С теоретико-групповой же точки зрения геометрией плоскости Лобачевского является геометрия группы H на круге D.

Задачи к главе IX

Представляем

IX.1. Как вы разделите куб на: а) 8 равновеликих кубов; б) 6 равновеликих пирамид; в) 3 равновеликие пирамиды; г) 4 равновеликие треугольные призмы; д) 6 равновеликих треугольных призм; е) 5 равновеликих прямоугольных параллелепипедов? (Равновеликие фигуры — это фигуры, равные по объему.)

IX.2. Как разделить прямую треугольную призму на 3 равновеликих тетраэдра?

IX.3. Как разделить параллелепипед на: а) 6 равновеликих пирамид; б) 3 равновеликие пирамиды?

IX.4. В шаре радиусом R провели три радиуса OA, OB, OC, из которых каждые два перпендикулярны. Какая часть объема шара ограничена четвертями больших кругов шара OAB, OAC, OBC и поверхности шара? а какая часть поверхности шара?

IX.5. Через одну точку проведены четыре прямые. Угол между первыми двумя равен углу между другими двумя. В результате каких движений первые две перейдут в другие две?

Находим величину

IX.6. В шар вписан: а) правильный тетраэдр; б) куб. На какие по площади части разделилась его поверхность плоскостями граней этого многогранника?

IX.7. Дан правильный тетраэдр с ребром 1. а) Плоскость проходит через середину его высоты перпендикулярно к ней. Нарисуйте тетраэдр, симметричный данному относительно этой плоскости. Нарисуйте объединение и пересечение данного и полученного тетраэдров. Вычислите объемы полученных многогранников. б) Нарисуйте тетраэдр, симметричный данному относительно середины его высоты. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного тетраэдров. Вычислите объемы полученных многогранников.

IX.8. Куб с ребром 1 поворачивают: а) вокруг прямой, соединяющей середины двух его параллельных ребер, не лежащих в одной грани, на 90°; б) вокруг диагонали на острый угол φ. Найдите объем общей части исходного и полученного кубов.

Ищем границы

IX.9. По одну сторону от плоскости α лежат две точки A и B. а) Найдите $K\in\alpha$, такую, что ломаная AKB имеет наименьшую длину. б) Найдите $K\in\alpha$, $L\in\alpha$, такие, что ломаная $AKLB$ имеет наименьшую длину, причем $|KL|=d$, где d известно.

IX.10. Плоскость вращается вокруг оси симметрии правильного тетраэдра, которая лежит в ней. Когда достигает граничных значений площадь сечения тетраэдра этой плоскостью?

Доказываем

IX.11. В замкнутой неплоской ломаной $ABCD$ $\angle ABC=\angle BAD$, $\angle ADC=\angle DCB$. Докажите, что $AC=BD$, $AD=BC$.

IX.12. Дан выпуклый многогранник. В нем выбираются любые две грани, а в них — любые два ребра. Оказывается, что есть такое самосовмещение движением, при котором совмещаются эти грани и эти ребра. Докажите, что многогранник является правильным.

IX.13. Неплоская фигура симметрична относительно любой плоскости, проходящей через данную прямую. Докажите, что она является фигурой вращения.

Исследуем

IX.14. Пусть в результате движения система точек A_1, ..., A_n перешла в систему точек B_1, ..., B_n. В какую точку в результате этого движения перейдет центроид системы точек A_1, ..., A_n?

IX.15. Является ли тетраэдр правильным, если он имеет: а) некоторое число плоскостей симметрии; б) некоторое число осей симметрии? Рассмотрите также различные сочетания этих элементов симметрии. Составьте аналогичную задачу про параллелепипед.

IX.16. Многогранник имеет центр симметрии, центр описанного шара, центр вписанного шара и центр масс. Установите положение этих точек относительно друг друга. Установите положение этих точек относительно плоскости симметрии и оси симметрии, если таковые имеются.

IX.17. Каким движением является композиция трех: а) центральных симметрий; б) зеркальных симметрий относительно трех попарно перпендикулярных плоскостей; в) осевых симметрий относительно прямых, проходящих через стороны треугольника? Было бы хорошо, если бы вам удалось установить, каким движением является композиция некоторого числа произвольно выбранных вами движений.

IX.18. Как расположены прямые a, b, c, если композиция трех осевых симметрий с этими осями есть перенос? Попытайтесь установить взаимное положение тех или иных геометрических объектов, определяющих движения, по тому, чем является композиция этих движений.

IX.19. Каким движением является движение f, если известно, что:

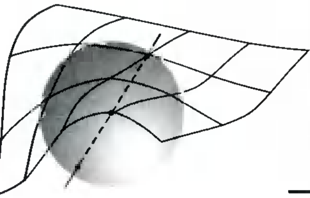
а) $f^2=E$ и оно имеет единственную неподвижную точку;

б) $f(A)=B$, $f(B)=C$, $f(C)=D$, $f(D)=A$ и эти точки не лежат в одной плоскости?

Участвуем в олимпиаде

IX.20. Выпуклое ограниченное тело имеет плоскость симметрии, параллельную любой заданной плоскости. Докажите, что оно является шаром.

IX.21. Замкнутая четырехзвенная ломаная касается боковой поверхности конуса (цилиндра). Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.



Современная геометрия и теория относительности

§ 46*. Современная геометрия

46.1. Коренное отличие современной геометрии

Если в одной фразе постараться выразить коренное отличие современной геометрии от той, какой она была до середины XIX века и элементы которой мы изучаем в нашем курсе, то можно сказать так. Раньше была одна геометрия — геометрия одного-единственного пространства, она изучала фигуры в этом единственном пространстве; теперь геометрия охватывает «геометрии» бесконечного множества разных воображаемых пространств, она изучает свойства самих этих пространств и фигур в них.

В отличие от всех прочих пространств то пространство, геометрию которого мы изучаем, называют трехмерным евклидовым пространством. Наряду с ним мыслятся теперь и изучаются пространства любого числа измерений — евклидовы и неевклидовы, пространства Лобачевского, римановы и обобщенные римановы пространства, проективные, метрические, топологические и т. д. не только n-мерные, но даже бесконечного числа измерений (поверхности тоже могут считаться пространствами — двумерными).

Что же представляют собой эти пространства, как их определяют, каков их реальный смысл?

Вспомним определение, данное еще в § 6: «Пространством элементарной геометрии называется множество точек, удовлетворяющее сформулированным аксиомам», точки — это просто элементы этого множества. Точно так же можно определить любое другое пространство: это множество каких-то элементов — точек, удовлетворяющее соответствующим аксиомам —

какие берутся аксиомы, такое определяется пространство. Название «пространство» указывает только на то, что оно по своим свойствам, которые определяются аксиомами, похоже более или менее на обычное пространство элементарной геометрии.

Например, если из аксиом, принятых нами в § 1, исключить аксиомы 2, 4, то оставшиеся определяют вообще евклидово пространство произвольного числа измерений. Фиксировать число измерений можно условием: число измерений пространства равно n, если в нем существует n и не больше взаимно перпендикулярных прямых. Так что, например, четырехмерное евклидово пространство — это множество точек, где выполняются аксиомы 1, 3, 5 и еще такая: существуют 4 и не больше взаимно перпендикулярные прямые (можно заметить, что тут выполняются все теоремы § 2: через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и поэтому их взаимная перпендикулярность определяется так же, как на плоскости).

Другой пример. **Метрическим пространством** называется множество, в котором каждой паре элементов (точек) X, Y отнесено число $|XY|$ — расстояние с известными нам условиями:

(1) $|XY|=0$ тогда и только тогда, когда $X=Y$.
(2) $|XY|=|YX|$.
(3) $|XY|+|YZ|\geqslant|XZ|$.

Это — аксиомы метрического пространства.

Рассмотрим, например, любые непрерывные функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Определим расстояние между двумя функциями:

$$|fg|=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|.$$

Вы можете проверить, что все три аксиомы (1) — (3) выполняются. Стало быть, рассматриваемые функции с определенным так расстоянием между ними образуют метрическое пространство — «пространство непрерывных функций».

Согласно теореме 31.1 поверхность в смысле ее внутренней геометрии представляет собой метрическое пространство.

Другие примеры, а их много, мы рассмотрим дальше.

Итак, пространство в современной математике определяется как множество каких-либо элементов — точек, наделенное той или иной структурой, теми или иными свойствами, по которым оно более или менее сходно с обычным пространством. Свойства его задаются теми или иными аксиомами.

Это общее понятие пространства сложилось в начале XX в. в итоге развития геометрии и математики в целом. Рассмотрим этапы этого развития и вместе с ними простейшие примеры пространств с их геометриями, их реальный смысл и значение.

46.2. Возможная геометрия реального пространства

Внутреннюю геометрию поверхности, о которой шла речь в § 31, можно понимать как такую, которую развивали бы люди, живущие в самой этой поверхности.

В самом деле, представим себе какую-нибудь поверхность и живущие в ней двумерные существа, не имеющие никакого понятия об окружающем пространстве. Они могли бы измерять на поверхности расстояния шагами или протянутыми нитями (рис. 326), проводить кратчайшие линии и делать другие построения и измерения. В общем они создали бы свою геометрию, отражающую свойства поверхности, в которой они живут. Это и была бы внутренняя геометрия данной поверхности.

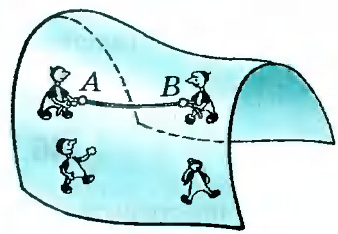


Рис. 326

Вместе с тем это была бы геометрия того пространства, в котором они живут, потому что вне ее для них ничего нет.

Это только образное описание того факта, что внутренняя геометрия поверхности полностью определяется измерением длин на самой поверхности.

Поверхности имеют разную внутреннюю геометрию, и можно представить себе наши двумерные существа на одной или другой поверхности — в одном или другом пространстве. Можно вообразить, что поверхность, где они живут, деформируется, так что геометрия ее изменяется со временем. Однако в этой сказке о двумерных существах есть глубокий смысл.

Мы живем в своем трехмерном пространстве, измеряем в нем длины, находим геометрические соотношения, делаем построения... Все это на самом деле, в нашей материальной деятельности. В ней люди обнаружили общие закономерности, выраженные потом в отвлеченной идеализированной форме в евклидовой геометрии. Но почему мы должны быть убеждены, что она абсолютно точно соответствует действительности? Ведь только из наших привычек и нашего воображения следует, что никакие отношения, отличные от евклидовых, не возможны. Например, почему теорема Пифагора не могла бы выполняться только приближенно или длина окружности была бы не в точности пропорциональна радиусу? Почем знать? И если в пределах обычного земного опыта эти различия ничтожны, то почему бы они не могли обнаружиться в звездных или атомных масштабах?

Таких вопросов не задавал никто, они могли казаться нелепыми и невозможными, пока их не задали себе в начале прошлого века независимо друг от друга два великих математика — Карл Гаусс, о котором мы уже говорили, и Николай Иванович Лобачевский. Попытки обнаружить отклонения от евклидовой геометрии не дали тогда никакого результата. Но сто лет спустя их догадки оправдались: теперь можно считать точно установленным, что в космических масштабах геометрия реального пространства несколько отлична от евклидовой.

46.3. Многомерное пространство

Идея пространства с числом измерений более трех зародилась еще до XIX в., но основы геометрии таких пространств были созданы к середине XIX в.

В прямоугольных координатах в обычном пространстве точка задается тремя координатами. Представим себе точки, каждая из которых задается n координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Между ними можно определить расстояние буквально так же, как в обычном пространстве — как корень из суммы квадратов разностей координат:

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Так получается ***n-мерное евклидово пространство***. Его геометрия аналогична обычной стереометрии — геометрии трехмерного евклидова пространства.

Можно определить расстояние иначе, и тогда будут получаться другие n-мерные пространства.

Геометрия n-мерного евклидова пространства, как сказано, аналогична обычной стереометрии, но и отличается от нее, если $n>3$. Так, в четырехмерном пространстве, кроме обычных двумерных плоскостей, есть трехмерные плоскости и каждая из них является, в смысле геометрии на ней, евклидовым трехмерным пространством с обычной стереометрией. В четырехмерном пространстве через каждую точку можно провести четыре взаимно перпендикулярные прямые; их можно принять за оси x_1, x_2, x_3, x_4. Через каждые три из них проходит трехмерная плоскость, а через две — двумерная; две двумерные плоскости пересекаются в одной точке, если они проходят через разные прямые — скажем, одна через оси x_1, x_2, другая — через оси x_3, x_4. Каждая ось перпендикулярна трехмерной плоскости, проходящей через три другие оси, т. е. ось перпендикулярна ко всякой прямой, лежащей в этой плоскости.

Вообще, если две трехмерные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по двумерной плоскости, и если прямая перпендикулярна трем прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна всякой прямой, лежащей в этой плоскости.

Вообще, стоит поразмыслить над началами четырехмерной геометрии — это не только интересно само по себе, но дополнит и углубит понимание стереометрии. Как определить четырехмерную пирамиду и призму, в частности параллелепипед, куб? Какие плоскости считаются параллельными? Трехмерные, если они не имеют общих точек, а двумерные, если они к тому же лежат в одной трехмерной плоскости; а если не лежат? Через сколько точек можно провести трехмерную плоскость?

В n-мерном пространстве при $n>4$ есть двумерные, трехмерные, ..., $(n-1)$-мерные плоскости.

46.4. Топология

Путь, по которому шло обобщение геометрии, пролегал еще через разделение разных свойств фигур. Самое основное из них — «прикосновение». На это указал еще Лобачевский, когда писал, что «прикосновение составляет основное свойство тел и дает им название геометрических, когда удерживает это свойство, отвлекаясь от всех остальных». (Например, разные части целой фигуры прикасаются друг к другу, фигура прикасается к своим граничным точкам.) Со свойствами фигур, основанными только на прикосновениях их частей, мы встречались в теореме Эйлера и в связи с правильными многогранниками. Там речь шла о сетях, образуемых отрезками, хотя бы кривыми. Форма отрезков и ограниченных ими областей не играла там никакой роли. Важно было только прикосновение: по скольку отрезков сходится в вершинах сети и по скольку отрезков «прикасается» к областям, «прошивая» их. Мы можем деформировать сеть любым способом, лишь бы эти свойства сохранялись.

Свойства фигур, основанные на прикосновении,— это такие их свойства, которые сохраняются при любых обратимых и непрерывных (в обе стороны) отображениях, т. е. при отображениях, происходящих без склеиваний и разрывов.

Со временем эти свойства фигур стали предметом специальных исследований и учение о них выделилось в особую область геометрии, названную **топологией**, а сами указанные свойства получили название топологических. В начале нашего века возникло общее понятие топологического пространства как такого, где определено только прикосновение фигур (или для любой фигуры ее точки прикосновения; прикосновение фигур определяется тем, что одна содержит точки прикосновения другой).

Топология приобрела большое значение и рассматривается как особая область математики, выделенная из геометрии. Значение ее основано на том, что она изучает самые коренные свойства пространства и других математических объектов — свойства непрерывности. Геометрия возникла из задач измерения, а изучение геометрических величин, их соотношений составляет главный предмет элементарной геометрии. Но в топологии измерение не играет в принципе никакой роли; она является не количественной, а качественной частью математики.

46.5. Другие геометрии

Еще раньше, чем топология, в геометрии определились другие ее части, тоже основанные на особых свойствах фигур.

Например, при параллельном проектировании с одной плоскости на другую длины, вообще говоря, изменяются, но параллельные прямые переходят в параллельные, отношения параллельных отрезков сохраняются, а вместе с ними сохраняются все зависящие от них свойства фигур. Учение об этих свойствах выделяется в особую область, называемую **аффинной геометрией.**

При проектировании из точки, называемом центральным проектированием, параллельность уже не сохраняется, но все же прямые переходят в прямые и сохраняются связанные с этим свойства фигур. Такие свойства называют проективными. Учение о них образует так называемую **проективную геометрию**. Она имеет значение в связи с изображением фигур в перспективе.

Пока речь шла о параллельном или центральном проектировании с плоскости на плоскость и соответственно об аффинной и проективной геометрии плоскости. Но можно их обобщить на пространство, и притом любого числа измерений. Именно к аффинной геометрии относятся те свойства фигур, которые сохраняются при преобразованиях, переводящих прямые в прямые и параллельные в параллельные, а к проективной геометрии относятся свойства, сохраняющиеся при преобразованиях, переводящих прямые в прямые без условия сохранения параллельности. (Книга «О проективных свойствах фигур» французского геометра Жана Понселе (1788—1867) вышла в 1822 г.)

Соответственно определяют пространство аффинное и проективное.

46.6. Основания геометрии

Если какое-либо пространство определяется аксиомами, или, как говорят, системой аксиом, то необходимо встает вопрос: возможно ли такое пространство, нет ли в принятых аксиомах противоречия?

В отношении пространства элементарной геометрии вопрос не вставал, потому что оно представлялось уже данным и дело шло о его изучении. Но когда Лобачевский заменил аксиому параллельных на противоположную, вопрос возник со всей остротой: а нет ли тут противоречия, возможна ли, в самом деле, неевклидова геометрия? Вопрос был решен положительно предъявлением соответствующей модели; первую дали поверхности, внутренняя геометрия которых совпадает с геометрией Лобачевского (в области на его плоскости). Это мог бы заметить еще Гаусс, но ни он и никто другой до итальянского геометра Эудженио Бельтрами (1835—1900) этого не замечали. Вскоре после этого были найдены другие простые модели геометрии Лобачевского на плоскости и в пространстве. В общем выяснилось, что ничего невообразимого и невозможного в ней нет, нужно только правильно ее понять. Тогда же она была включена в гораздо более общую теорию, созданную немецким математиком Бернхардом Риманом (1826—1866).


Бернхард Риман

Таким образом, первое, обязательное условие для любой системы аксиом — это ее непротиворечивость. Она доказывается предъявлением модели, в которой реализуются данные аксиомы.

Второе условие состоит в том, чтобы аксиомы действительно давали основания соответствующей теории, т. е. чтобы все свойства того пространства или тех пространств, которые рассматриваются в теории, вытекали из аксиом, а не примысливались помимо аксиом.

Конечно, нельзя абсолютно все выразить явно в аксиомах, но то, что подразумевается, должно быть, по крайней мере, общепризнанным, чтобы уже не требовать определения в аксиомах. Например, мы говорим: через две точки проходит прямая, подразумевая, что смысл слова «две» общепризнан.

Конечно, необходимо стремиться к тому, чтобы подразумевать как можно меньше и чтобы подразумеваемое можно было действительно считать не требующим определения, как общепризнанное и общепонятное.

Давид Гильберт

У Евклида и всех геометров до конца прошлого века многое подразумевалось как само собой понятное, как, например, свойства расположения точек на прямой и плоскости, что точка разбивает прямую на два луча, что из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими, что прямая разбивает плоскость. Никакой мысли выразить это явно в аксиомах не возникало, это стали делать лишь к концу XIX в., и в 1899 г. немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943) дал полную с современной точки зрения систему аксиом евклидовой геометрии.

У него уже ничего не подразумевается, кроме основных логических понятий. Его «Основания геометрии» начинаются словами: «Мы мыслим три вида вещей, которые называем точками, прямыми, плоскостями». Тут ничего не подразумевается, кроме самого общего понятия «вещь».

Дальше называются основные отношения, как «точка лежит на прямой» и др., и опять ничего не подразумевается, кроме общего понятия отношения. Свойства отношений явно формулируются в аксиомах, и наглядный их смысл совершенно не подразумевается.

Система аксиом Гильберта была потом еще усовершенствована и были даны также другие системы аксиом в том же строгом духе.

Когда предмет аксиом не подразумевается и речь идет о «некоторых вещах», «некоторых отношениях», то встает вопрос о непротиворечивости. Он решается указанием модели на основе действительных чисел (точка плоскости — это пара чисел (x, y), прямая — это уравнение $ax+by+c=0$ с точностью до общего множителя и т. д.).

Второй вопрос касается так называемой полноты системы аксиом: вполне ли она определяет одно пространство, так что к ней уже ничего нельзя добавить — никаких новых аксиом.

Третий вопрос — о независимости аксиом: нет ли среди них лишних, которые можно было бы вывести из других. Это требование у Гильберта сначала еще не было полностью выполнено, его систему довели до совершенства позже.

Теперь имеется непротиворечивая полная система независимых аксиом элементарной геометрии, в которой подразумеваются только основные логические понятия (и даже это обходят посредством символической записи, где уже ничего понимать не надо, кроме как различать разные и отождествлять одинаковые знаки и действовать с ними по определенным правилам).

Однако при всех этих уточнениях и, можно сказать, ухищрениях что-то все же подразумевается, и потому вопросы о дальнейшем уточнении системы аксиом не могут быть полностью сняты.

Также не решается до конца и вопрос непротиворечивости, потому что его решение опирается на какие-то предпосылки, которые сами требуют доказательства непротиворечивости, и т. д. Хотя Гильберт доказывал непротиворечивость своих аксиом числовой моделью, но сама теория действительных чисел нуждается в доказательстве непротиворечивости. Словом, нет ни в какой науке, даже в самой строгой математике, окончательной непротиворечивости, окончательной абсолютной истины. Математика, как все человеческое познание, движется не только в ширь новых открытий и результатов, не только в высь новых теорий, но и в глубину оснований, и за одной достигнутой их глубиной лежит еще другая. Самодовольные, близорукие ученые могут думать, что вот они достигли полной строгости, но приходят другие, более глубоко мыслящие, и задают новые вопросы, и ищут новые решения. Во всякой утвержденной истине есть момент заблуждения, поскольку она не является совершенно окончательной и потому не может утверждаться без малейшей доли сомнения.

В современной геометрии та или иная система аксиом определяет сплошь и рядом не одно-единственное пространство, а класс — некоторый вид пространств, как, например, метрические пространства. Тут полноты системы аксиом заведомо нет, к ней можно добавлять новые аксиомы, выделяя другие классы пространств, как из всех метрических пространств можно выделить, например, евклидовы, а из них именно трехмерное евклидово пространство элементарной геометрии.

46.7. Векторные пространства

Есть такое построение оснований геометрии, когда за основные «вещи» принимают, наряду с точками, векторы. При этом сначала векторы рассматривают отвлеченно сами по себе, объединяя их в «векторное пространство». Так вводится определение.

Векторным пространством называется множество элементов, называемых векторами, для которых определены две операции — сложения и умножения на действительные числа, причем эти операции обладают свойствами, выраженными в следующих аксиомах (векторы обозначают как и раньше: $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т. п.).

Аксиомы сложения

1. Каждой паре векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ сопоставляется определенный (единственный) вектор — их сумма: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ для любых $\vec{a}$, $\vec{b}$ (сложение коммутативно).

3. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ для любых $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (сложение ассоциативно).

4. Существует нулевой вектор, т. е. такой вектор $\vec{0}$, что $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

5. У каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный ему вектор, т. е. такой вектор $-\vec{a}$, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Аксиомы умножения на число

1. Каждому вектору $\vec{a}$ и каждому числу α сопоставляется определенный (единственный) вектор — произведение $\vec{a}$ на α: $\vec{c} = \alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha$.

2. $1\vec{a} = \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

3. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ для любых чисел α, β и любого вектора $\vec{a}$.

4. $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ для любых чисел α, β и любого вектора $\vec{a}$.

5. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ для любого числа α и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Это **аксиомы векторного пространства.**

Множество векторов в пространстве (а также на прямой и на плоскости) обладает этими свойствами и потому является векторным пространством.

С другой стороны, векторными пространствами являются и множества, рассматриваемые не только в геометрии, но и в других разделах математики. Например, множество R^n, элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы n действительных чисел:

$$\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n),\ \vec{y}=(y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n)$$

и т. п. — и в котором введены операции сложения и умножения на число следующими равенствами:

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \dots,\ x_n+y_n)$$

и

$$\alpha\vec{x}=(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \dots,\ \alpha x_n).$$

Множество всех числовых функций, заданных на некотором множестве, и множество всех многочленов также являются векторными пространствами.

В векторном пространстве можно ввести понятие базиса (см. п. 35.3) и затем определить размерность пространства как число элементов в его базисе (размерность может быть и бесконечной).

Но в векторных пространствах не определены метрические понятия — длины векторов, углы между ними. Их можно определить, вводя еще одну операцию — **скалярное умножение векторов,** обладающее (знакомыми нам) свойствами, выраженными в следующих аксиомах.

Аксиомы скалярного произведения

1. Каждой паре векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ сопоставляется определенное действительное число $\vec{a}\,\vec{b}$.

2. $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.

3. $(\alpha\vec{a})\vec{b}=\alpha(\vec{a}\,\vec{b})$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого числа α.

4. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5. $\vec{a}\,\vec{a}\geqslant 0$. $\vec{a}\,\vec{a}=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}=\vec{0}$.

Векторное пространство, в котором введено скалярное умножение векторов с перечисленными свойствами, называется **евклидовым векторным пространством**.

В евклидовом векторном пространстве можно определить **длину вектора** $\vec{a}$ равенством

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\,\vec{a}} \qquad (46.1)$$

и определить **угол $\varphi\in[0, \pi]$ между ненулевыми векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равенством

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{46.2}$$

(предварительно из аксиом доказывается важное неравенство

$$|\vec{a}\,\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$$

т. е. правая часть в (46.2) по модулю не больше единицы и равенство (46.2) действительно определяет угол φ).

Понятие евклидова векторного пространства дает еще один подход к определению евклидова пространства (любой размерности). Он состоит в следующем. Рассматривается некоторое множество M, элементы которого называются точками и обозначаются A, B и т. д. Каждой упорядоченной паре точек A, B из M ставится в соответствие единственный вектор $\overrightarrow{AB}$ из заданного n-мерного евклидова векторного пространства V^n. Это соответствие удовлетворяет двум аксиомам:

1. Для каждой точки A из M и каждого вектора $\vec{v}$ из V^n существует единственная точка B из M, такая, что $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ (т. е. от любой точки можно отложить единственный вектор, равный данному вектору).

2. Для любых точек A, B, C из M

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

(т. е. векторы складываются по правилу треугольника).

Если векторное пространство V^n евклидово, т. е. в нем определено скалярное умножение, то множество M с указанными аксиомами будет **n-мерным евклидовым пространством**, оно обозначается E^n. Расстояния в нем задаются равенством $|AB|=|\overrightarrow{AB}|$. Это то же самое пространство, какое было определено в п. 46.3.

При $n=1$, 2, 3 мы получим уже изученные нами прямую, плоскость и пространство (трехмерное), с той лишь разницей, что в них расстояния являются не величинами, а числами (это соответствует тому, что фиксирована единица длины — единичный отрезок).

Если за V^n принять просто векторное пространство без скалярного умножения, то множество M с указанными двумя аксиомами будет **n-мерным аффинным**

пространством; оно обозначается A^n. О нем было коротко сказано в п. 46.5.

В этом пространстве (как и в евклидовом) можно определить радиус-вектор точки X с началом в точке O как вектор $\overrightarrow{OX}$. При этом все сказанное в п. 35.4 переносится в любое аффинное пространство A^n. Прямая и плоскость в нем задаются уравнениями (35.10) и (35.12). Это одномерные и двумерные плоскости. А как будут задаваться плоскости большего числа измерений, можно сообразить по аналогии.

Векторные пространства, особенно бесконечномерные, имеют в современной математике чрезвычайно большое значение. Длины векторов определяются в них по-разному, но самый главный случай представляет обобщение евклидова векторного пространства, называемое **гильбертовым пространством**. Оно играет важную роль в современной теоретической физике (в квантовой механике).

46.8. Геометрия и действительность

Отношение геометрии, как и всей математики, к опыту, к данной в нем реальной действительности сложно.

Геометрия возникла из практики как практическая опытная наука о пространственных формах и отношениях реальных тел. Она явилась, можно сказать, первой главой физики, за которой следовала как вторая глава механика — наука о движении тел: если геометрия трактует взаимное расположение тел, то механика — его изменение.

Однако геометрия постепенно отделилась от опыта, ее предмет составили уже не реальные, а идеальные фигуры. Обращение к опыту, даже к чертежу, было исключено из аргументов геометрии; доказательство теоремы дается путем одного рассуждения. Это понятно: с идеальными фигурами нельзя ставить опыты, их нельзя ни сделать, ни нарисовать, их, в их идеальности, можно только мыслить.

Это отделение геометрии от действительности особенно четко проявилось, когда греки открыли несоизмеримые отрезки.

Содержание теоремы Пифагора было известно задолго до Пифагора как опытный факт, как закон реальной геометрии, подобно любому закону физики. По этому закону площадь квадрата, построенного на диагонали данного квадрата, имеет в два раза большую площадь. Отношение диагонали к стороне равно $\sqrt{2}$. Диагональ и сторона несоизмеримы: нет отрезка, укладывающегося в них по целому числу раз.

Но это последнее утверждение не имеет смысла, проверяемого на опыте, так как абсолютно точное измерение невозможно. Оно, вообще, не имеет реального смысла потому, что, как теперь известно, никакие реальные предметы не имеют абсолютно точных размеров, никакая реальная длина не может быть абсолютно точно фиксирована, поскольку тела состоят из частиц, не имеющих вполне определенных размеров.

Таким образом, исходя из твердо установленного опытного факта, геометрия делает вывод, не имеющий реального смысла. Физики отбросили бы такой вывод как ненужный и бессмысленный, а математики удержали его, и, мало того, они построили теорию отношений несоизмеримых величин, потом истолковали эти отношения как новый вид чисел — как иррациональные числа, потом на этой почве развили математический анализ и т. д.

Что тут происходило? Во-первых, выводу из опыта был придан абсолютно точный смысл. Во-вторых, из него был сделан логический вывод, и затем на этом выводе шло восхождение к новым отвлеченным понятиям.

Такова особенность и сущность математики вообще. Всякой науке свойственна абстракция, но во всех других науках их абстракции сверяются с опытом, им не придается самостоятельного значения. В математике же они принимаются в их идеальном существовании.

Евклидова геометрия сложилась, таким образом, как наука об идеальных фигурах, а вместе с тем оказалось, она абсолютно точно соответствует свойствам реального пространства — реальным пространственным отношениям. Однако это утверждение было подвергнуто сомнению Лобачевским и Гауссом и опровергнуто современной физикой — ее выводами из общей теории относительности Эйнштейна. Евклидова геометрия, возникнув из опыта и отделившись от него в своей идеальной точности, пришла с ним в некоторое несоответствие.

Но это ничуть не затрагивает ее как часть чистой математики, потому что в этом смысле она представляет собой систему логических выводов из аксиом независимо от их возможного отношения к действительности.

Произошло раздвоение единой геометрии на чисто математическую геометрию с ее единственным условием логической точности и на геометрию как физическую теорию, как учение о свойствах реального пространства, сверяемое с опытом, что присуще всякой физической теории. Эту геометрию реального пространства в космических масштабах трактует космология, основанная на общей теории относительности и известных из наблюдений данных о строении Вселенной.

Сочетание двух взаимно противоположных сторон геометрии проходило через весь наш курс с самого его начала. Мы постоянно ссылались на опыт и вместе с тем старались вести строго логические выводы из аксиом без ссылок на опыт, чертежи и пр.

Всякая теория чистой математики, взятая именно в этом ее качестве чисто математической теории, является системой логических выводов, и ее собственная математическая истинность состоит только в ее непротиворечивости. Но вместе с тем она имеет смысл и значение только в меру того, насколько она так или иначе, прямо или косвенно через другие теории служит познанию действительности и овладению ею в практике.

Математические теории можно уподобить станкам, значение которых состоит в том, чтобы делать нужные людям вещи, сами же по себе они не нужны. Но как станку нужна точная и прочная структура, так и чистой математике нужна логическая строгость — прочность ее структуры. В станке непосредственно работает один резец, но без станка в целом он не будет хорошо работать. Так и в математике непосредственно применяться в практике могут отдельные ее части и выводы, но, чтобы обеспечить точность этих применений, нужны целостные математические теории, вся логическая структура математики в целом.

Сказанное определяет отношение к действительности геометрий разных пространств: они служат теоретическим средством для других наук.

Представим себе, например, какую-нибудь физическую систему, будь то машина, газ в данном сосуде, атом кислорода или даже отдельная частица — электрон. Система может находиться в разных состояниях. Множество всех ее возможных состояний образует то, что в физике называют фазовым пространством системы. Оно, понятно, существенно характеризует свойства системы. Для его теоретического описания, для выводов, его касающихся, полезной и важной оказывается подходящая «геометрия» из арсенала отвлеченных геометрий разных пространств. (Пространство состояний квантовой системы даже бесконечномерно.) В частности, общее понятие метрического пространства оказывается полезным, когда определяют «расстояние» между «вещами» или явлениями одного и того же рода как меру того, насколько одно отлично от другого. Например, определяют расстояние между двумя цветами (ощущениями цвета), характеризующими степень их различия. Множество всех цветов (цветовых ощущений) оказывается, таким образом, некоторым метрическим пространством. Это пространство на самом деле рассматривают в науке — в цветоведении, оно характеризует цветное зрение человека. Кстати, оно трехмерно, так как каждое ощущение цвета — цвет можно получить как комбинацию трех основных ощущений — цветов: красного, зеленого и синего. Это записывают в виде $Ц=xК+yЗ+zС$, где x, y, z — интенсивность красного, зеленого и синего в каких-либо единицах.

Но самый яркий пример применения отвлеченной геометрии — это общая теория относительности, математическим аппаратом которой послужила общая теория пространств, начала которой были заложены немецким математиком Риманом за 60 с лишним лет до создания общей теории относительности. Вырастая на почве математических абстракций, теория вернулась к исходной геометрической действительности как орудие ее более глубокого познания.

§ 47*. Теория относительности и геометрия

47.1. Возникновение теории относительности

Теория относительности была создана Альбертом Эйнштейном (1879—1955) в 1905 году (и независимо и почти одновременно также Анри Пуанкаре[1] (1854—1912), но не в такой же ясной форме; поэтому создателем теории признают Эйнштейна).

Теория была призвана решить важную проблему, стоявшую в физике в течение довольно долгого времени. Проблема эта касалась законов электромагнитных явлений в движущихся телах. Работа Эйнштейна так и

[1] Анри Пуанкаре — великий французский математик, один из создателей новых областей математики: топологии и качественной теории дифференциальных уравнений.

называлась: «К электродинамике движущихся тел». (Заметим, что всякая серьезная теория возникает из потребности решения назревшей в науке задачи и, как правило, создается одновременно или почти одновременно не одним, а двумя (если не больше) учеными. Так, начала аналитической геометрии создали Декарт и Ферма, анализ создан Ньютоном и Лейбницем, неевклидову геометрию создали Лобачевский и Бойяи, начала квантовой механики — Гейзенберг, Шредингер и др., теорию эволюции — Дарвин и Уоллес и т. д.)

Развитие теории обязано немецкому математику Герману Минковскому (1864—1909). Отметим, что среди многих достижений этого математика создание теории выпуклых тел.

47.2. Постулаты теории относительности

Движение определяется по отношению к той или иной системе отсчета. Под системой отсчета понимается тело или совокупность тел, с которыми связана система координат x, y, z в пространстве и отсчет времени t с помощью часов (часами может служить в принципе любой периодический процесс). Координаты x, y, z мы будем предполагать прямоугольными. Для наглядности говорят о наблюдателе, который следит за движением из системы отсчета (как человек на Земле за движением звезд, пассажир поезда за тем, что проносится за окном, и т. п.).

Система отсчета называется инерциальной, если в ней выполняется закон инерции: тело, не испытывающее воздействия каких бы то ни было сил, движется относительно системы равномерно и прямолинейно.

В основу теории относительности Эйнштейн положил два постулата:

1. Принцип относительности: *любые физические явления протекают в инерциальных системах по одинаковым законам.*

2. Принцип постоянства скорости света: *относительно всякой инерциальной системы свет распространяется с одной и той же скоростью*[1]. (Это относится не только к свету, но и ко всем электромагнитным волнам.)

---

[1] Эйнштейн на самом деле формулировал более специальный постулат: скорость распространения света не зависит от скорости движения источника. Но из этого постулата и принципа относительности непосредственно следует высказанный здесь постулат.

Оба постулата, как и вся теория относительности, полностью проверены за прошедшие годы, так что их следует считать не предположениями, а законами природы. Принцип относительности был установлен еще Галилеем для механических явлений, здесь он обобщается на все явления. Постоянство скорости света было установлено еще в опытах американского физика А. Майкельсона (1852—1931) в 1881 году.

47.3. Преобразования Лоренца

Представим себе две инерциальные системы S и $\tilde{S}$ с координатами и отсчетом времени (масштабы и часы предполагаются одинаковыми). Каждому событию (точке — мгновению) в одной системе относятся координаты и время (x, y, z, t), в другой — $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$. Спрашивается, как выражаются одни через другие.

Допустим, что координатные оси обеих систем в начальный момент $t=\tilde{t}=0$ совпадают и система $\tilde{S}$ равномерно движется относительно S вдоль оси x. Представим себе, что в начальный момент в начале координат (общем в этот момент для обеих систем) происходит мгновенная вспышка и от нее распространяется свет во все стороны. Если r — расстояние, пройденное светом за время t, то $r=ct$, где c — скорость света. В координатах обеих систем это дает:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=ct, \quad \sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}=c\tilde{t},$$

или

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2, \quad \tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2=c^2\tilde{t}^2. \qquad (47.1)$$

Так как движение системы $\tilde{S}$ происходит в направлении оси x, то оси $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ переносятся параллельно. В начальный момент оси y, z и $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ совпадали. Отсюда следует, что координаты y, z и $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ все время остаются равными (для точек, у которых они совпадают в начальный момент, т. е. эти точки системы $\tilde{S}$ как бы скользят вдоль прямых, параллельных оси x). Поэтому $\tilde{y}=y$ и $\tilde{z}=z$. Благодаря этим равенствам из формулы (47.1), очевидно, следует, что

$$\tilde{x}^2-c^2\tilde{t}^2=x^2-c^2t^2. \qquad (47.2)$$

Выразим отсюда $\tilde{x}$, $\tilde{t}$ через x, t. Положим, что

$$\tilde{x}=\alpha x+\beta t,\ \tilde{t}=\gamma x+\delta t. \qquad (47.3)$$

Преобразование от x, t и $\tilde{x}$, $\tilde{t}$ линейное, так как системы иннерциальные, и потому равномерное движение вдоль оси x является таким в одной и в другой системе, т. е. если $x=ut+x_0$, то $\tilde{x}=\tilde{u}\,\tilde{t}+\tilde{x}_0$. (Линейная зависимость остается линейной при переходе от S к $\tilde{S}$.)

Так как оси x, $\tilde{x}$ одинаково направлены, то $\tilde{x}$ растет вместе с x. Поэтому $\alpha>0$. Точно так же время $\tilde{t}$ (показания часов) растет вместе с t, так что и $\delta>0$.

Теперь, подставляя выражения (47.3) в (47.2) и приравнивая коэффициенты, получим:

$$\alpha^2-c^2\gamma^2=1,\ \beta^2-c^2\delta^2=-c^2,\ \alpha\beta-c^2\gamma\delta=0. \qquad (47.4)$$

Из последнего равенства $c\gamma=\frac{\alpha\beta}{c\delta}$. Подставляя это в первое равенство, получаем $\alpha^2-\frac{\alpha^2\beta^2}{c^2\delta^2}=1$, или

$$\alpha^2\left(1-\frac{\beta^2}{c^2\delta^2}\right)=1. \qquad (47.5)$$

Из второго равенства (47.4), деля на $-c^2$, получим $\delta^2-\frac{\beta^2}{c^2}=1$, или

$$\delta^2\left(1-\frac{\beta^2}{c^2\delta^2}\right)=1. \qquad (47.6)$$

Из (47.5) и (47.6) следует, что $\alpha^2=\delta^2$, и так как $\alpha>0$, $\delta>0$, то $\alpha=\delta$.

Положим еще $\frac{\beta}{\delta}=-v$, так что

$$\beta=-\delta v=-\alpha v. \qquad (47.7)$$

Тогда из (47.5) и (47.6) следует, что

$$\alpha=\delta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (47.8)$$

Наконец, из последнего равенства (47.4) и из (47.7)

$$\gamma=\frac{\alpha\beta}{c^2\delta}=\frac{\beta}{c^2}=-\alpha\frac{v}{c^2}. \qquad (47.8,\ a)$$

Подставляя полученные выражения (47.7) — (47.8) для α, β, γ, δ в формулы (47.3) для $\tilde{x}$, $\tilde{t}$, получим:

$$\tilde{x}=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\quad \tilde{t}=\frac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \qquad (47.9)$$

Из первой формулы легко выводится смысл величины v. Если $\tilde{x}=0$, т. е. берем начало координат системы $\tilde{S}$, то $x=vt$. Следовательно, v есть скорость движения начала координат системы $\tilde{S}$ относительно S (она же скорость движения всех точек системы $\tilde{S}$).

Формулы (47.9) вместе с равенствами $\tilde{y}=y$, $\tilde{z}=z$ дают переход — преобразования от координат и времени в системе S к координатам и времени в системе $\tilde{S}$. Они называются преобразованиями Лоренца (по имени ученого, который нашел их раньше, но из других соображений).

Мы предполагали, что оси координат в системах S, $\tilde{S}$ в начальный момент, общий для отсчета времени в обеих системах, совпадают и что одна система движется относительно другой вдоль оси x. Но можно рассматривать любые инерциальные системы S, $\tilde{S}$ с любым расположением осей. Переносом начала координат и, если нужно, начала отсчета времени добьемся того, чтобы они совпадали: в начальный момент начала координат совпадали. Затем поворотом осей и, может быть, отражением придем к такому их расположению, как предполагалось.

Таким образом, общие преобразования Лоренца от одной инерциальной системы к другой представляются композицией частных преобразований вида (47.9), какие мы вывели, преобразований прямоугольных координат и, может быть, переноса начала отсчета времени. Кроме того, если в системах S, $\tilde{S}$ применялись разные масштабы измерения координат и времени, то нужно добавить изменение масштабов.

Отметим, что формулы (47.9) теряют смысл при $v \geqslant c$: знаменатель обращается в нуль или становится мнимым. Это значит, что вообще возможно только $v<c$ (точнее, $|v|<c$, поскольку скорость v будет отрицательной, если система $\tilde{S}$ движется в отрицательном на-

правлении оси x). А так как систему $\tilde{S}$ можно связать с любым телом, то это означает, что никакое тело не может двигаться относительно инерциальной системы со скоростью, равной или большей скорости света.

47.4. Относительность времени

Примечательно, что в преобразованиях Лоренца — в формулах (47.9) время в одной системе отличается от времени в другой, тогда как в обычной — классической механике и по обычному представлению время одно и то же во всех системах. В теории же относительности это не так: время относительно. Это и послужило, надо думать, главным основанием тому, что сама теория получила название теории относительности.

В этой теории порядок событий во времени, вообще говоря, относителен: может быть разным в разных системах.

Возьмем разности времен каких-либо двух событий M_1 и M_2: $t_1 - t_2 = \Delta t$ и $\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2 = \Delta \tilde{t}$. Из второй формулы (47.9), очевидно, следует:

$$\Delta \tilde{t} = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t \frac{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Если событие M_1 следует за событием M_2 в системе S, то $\Delta t > 0$. А что будет в системе $\tilde{S}$?

1) Если $\Delta t < \frac{v}{c^2}\Delta x$, то $\Delta \tilde{t} < 0$, т. е. порядок событий M_1 и M_2 в системе $\tilde{S}$ обратный: M_1 предшествует M_2.

2) Если $\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x$, то $\Delta \tilde{t} = 0$: события M_1 и M_2 в системе одновременны.

3) И только если $\Delta t > \frac{v}{c^2}\Delta x$, то $\Delta \tilde{t} > 0$: порядок событий M_1 и M_2 в системе $\tilde{S}$ такой же, что и в S.

Случаи 1, 2 показывают, считая $v > 0$, что если Δx достаточно велико, т. е. события раздвинуты по оси x, то порядок их во времени в системе $\tilde{S}$ другой. Это не противоречит принципу причинности, потому что при большом расстоянии никакое воздействие от одного события не может дойти до другого за время Δt.

Итак, время относительно: оно определено только в отношении к той или иной системе отсчета.

Пространство, как известно без теории относительности, относительно: определено лишь в отношении к той или иной системе отсчета. В самом деле, в геометрии пространство определено как множество точек, физически же точка — это точно определенное место, и оно определено лишь в отношении к тем или иным телам — к системе отсчета. Например, предмет лежит на «одном месте» в вагоне, но поезд движется, и «место» относительно Земли меняется, но и Земля движется, и движется вся Солнечная система. В частности, события, происходящие в разное время в одном месте, в одной системе, могут происходить в разных местах в другой системе одновременно.

В дополнение об относительности времени и пространства заметим, что длительность процессов и пространственные расстояния относительны, как будет доказано в последующих пунктах.

47.5. Геометрия мира

Итак, время и пространство относительны, определены не сами по себе, а только в отношении к той или иной системе отсчета.

Минковский начал изложение предложенного им понимания теории относительности следующими примечательными словами:

«Я имею в виду представить концепцию, согласно которой время само по себе и пространство само по себе обращаются в тени и только некоторый синтез их сохраняет право на существование».

Какой же это синтез? Мир представляет собой множество событий. Каждое событие характеризуется в любой системе отсчета местом и временем, где и когда оно произошло,— тремя пространственными координатами x, y, x и временем t. Стало быть, мир как множество событий имеет четыре измерения.

Тот взгляд, что время можно присоединить к пространству в качестве четвертого измерения мира, зародился давно (еще в XVIII веке). Но такое их соединение было чисто внешним: время представлялось «абсолютным», ни от чего не зависящим. Так же мыслилось «абсолютное» пространство.

В геометрии же пространства-времени фигурируют только координаты. Относящиеся к ним уравнения и величины должны быть инвариантны относительно преобразований пространственно-временных координат от одной инерциальной системы к другой, т. е. относительно общих преобразований Лоренца, как они были определены выше в п. 3. Все то, что инвариантно относительно таких преобразований, образует геометрию пространства-времени, геометрию мира. Она уже никак не зависит от системы отсчета, как не зависят от системы отсчета сами события и их отношения.

Минковский выразил это в красивом утверждении: «Название «постулат относительности» слишком бледно выражает его истинное значение, вернее назвать его «постулатом абсолютного мира».

Позже (в 1949 году) А. Д. Александровым было показано, что геометрия пространства-времени — геометрия мира — определяется распространением света (вообще электромагнитных волн); потоки света создают связь между событиями, создают в мире структуру, которая и есть его геометрия — геометрия пространства-времени. Красиво представлять себе потоки света, пронизывающие мир и так создающие в нем определенную структуру. Математически это значит, что общие преобразования Лоренца — это те, которые сохраняют выражение закона распространения света из любой точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ в любой момент t_0: $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=c\,(t-t_0)$, не предполагая, что системы инерциальные.

47.6. Интервал

Двум событиям M_1, M_2 в любой инерциальной системе S сопоставляется величина $(c\Delta t)^2-r^2$, где Δt и r — промежуток времени и расстояние между данными событиями в системе S. Эта величина, оказывается, одна и та же для данных событий во всякой инерциальной системе с теми же маштабами; иначе говоря, она инвариантна относительно общих преобразований Лоренца без изменения масштаба. Ее называют **квадратом интервала** между событиями M_1, M_2.

При изменении масштаба все эти величины для всех пар событий изменяются на один и тот же численный множитель.

Но в теории относительности время вообще не определено и не существует само по себе, а существует только в той или иной системе отсчета. Оно соединяется с пространством в едином четырехмерном пространстве-времени.

Системы отсчета с четырьмя пространственно-временными координатами x, y, z, t играют в мире роль систем координат.

Точка пространства-времени — это любое мгновенно-точечное событие, отвлеченное от всех физических свойств; в системе отсчета она полностью характеризуется своими координатами (x, y, z, t).

Пространство-время — это множество таких точек, т. е. множество всех мгновенно-точечных событий в мире, отвлеченных от всех физических свойств, в данной системе отсчета этому соответствует множество всех наборов пространственно-временных координат (x, y, z, t).

Свойства же пространства-времени — его геометрия — это те отношения между его точками, которые не зависят от системы отсчета, т. е. это те соотношения, которые одинаково выражаются во всех инерциальных системах.

Это же можно выразить еще так. К геометрии пространства-времени — к геометрии мира относятся те и только те соотношения и величины, выражаемые в пространственно-временных координатах и инерциальных системах, которые не изменяются — инвариантны — при переходе от одной системы отсчета к другой (подобно тому как геометрии принадлежат те выраженные в координатах соотношения, которые сохраняются при преобразованиях прямоугольных координат).

Это есть не что иное, как частный случай принципа относительности. Согласно этому принципу все явления протекают в инерциальных системах по одинаковым законам, т. е. уравнения, выражающие законы природы, должны быть инвариантны при преобразованиях от одной инерциальной системы к другой. В законы физики, помимо координат, входят другие величины, которые должны соответственно преобразовываться.

Инвариантность величины $(c\Delta t)^2 - r^2$ доказана при выводе преобразований Лоренца. Рассмотрим события M_1, M_2 в системах S, $\tilde{S}$. Поместим в одном из событий начала кооординат и отсчета времени в обеих системах. Повернем оси так, чтобы оси x, $\tilde{x}$ были направлены по движению системы $\tilde{S}$ относительно S, а остальные оси y, $\tilde{y}$ и z, $\tilde{z}$ были параллельны. Тогда $r^2 = x^2$, $\Delta t = t$

и квадрат интервала в системе S будет $(ct)^2-x^2$ и аналогично в системе $\tilde{S}$. Поэтому равенство квадратов интервалов будет иметь вид:

$$c^2t^2-x^2=c^2\tilde{t}^2-\tilde{x}^2. \tag{47.10}$$

А это — равенство (47.2), из которого мы вывели преобразования Лоренца. Подставляя в правую часть (47.10) выражения для $\tilde{x}$, $\tilde{t}$ из формул преобразования Лоренца (47.9), убедимся в том, что равенство (47.10) верно.

Пары событий делятся на три класса в зависимости от знака интервала.

1) Если $(c\Delta t)^2-r^2>0$, то величина $cT=\sqrt{(c\Delta t)^2-r^2}$ называется **временноподобным интервалом** и существует такая система отсчета S', в которой события происходят в одном месте: $r'=0$, так что T есть промежуток времени между событиями в системе S'.

2) Если $(c\Delta t)^2-r^2<0$, то величина $R=\sqrt{r^2-(c\Delta t)^2}$ называется **пространственноподобным интервалом** и существует система отсчета S', в которой события одновременны, а R — расстояние между ними.

3) Если $(c\Delta t)^2-r^2=0$, то интервал называется **изотропным** (или **световым**).

Доказать сказанное можно, воспользовавшись тем же приемом, как при доказательстве инвариантности квадрата интервала, и представить его как $c^2t^2-x^2$. Если $c^2t^2-r^2>0$, т. е. $|x|<ct$, то берем систему S', движущуюся с такой скоростью v, что $x=vt$. Это возможно, поскольку $|x|<ct$ и скорость $v=\dfrac{x}{t}<c$ (скорость должна быть меньше c). При $x=vt$ будет $x'=0$ и интервал будет ct'.

Если $c^2t^2-x^2<0$, то можно взять такую скорость v, что $t=\dfrac{v}{c^2}x$, и, стало быть, в преобразованиях Лоренца $t'=0$.

47.7. Псевдоевклидовы пространства

Рассматриваемое чисто математически, без физического смысла координат, пространство-время представляет собой частный случай псевдоевклидова пространства и называется пространством Минковского; в нем t — четвертая координата или первая координата.

Псевдоевклидовым называется пространство любого числа измерений, в котором в некоторых координатах каждой паре точек сопоставлена величина

$$M_1M_2=(x_1-x_1')^2+\ldots+(x_m-x_m')^2-(x_{m+1}-x_{m+1}')^2-\ldots$$
$$\ldots-(x_n-x_n')^2.$$

При этом геометрия в таком пространстве определяется тем, что геометрический смысл придается каждому выражению или уравнению в координатах, которое сохраняется при любых преобразованиях, сохраняющих все величины M_1M_2 с точностью до общего численного множителя (соответствующего изменению масштаба измерения координат).

Преобразования, сохраняющие величину M_1M_2, сохраняют ее и с обратным знаком. Поэтому то же псевдоевклидово пространство определится, если отнести каждым двум точкам величину

$$-(x_1-x_1')^2-\ldots-(x_m-x_m')^2+$$
$$+(x_{m+1}-x_{m+1}')^2+\ldots+(x_n-x_n')^2.$$

Уточнение. Между геометрией пространства-времени и псевдоевклидова пространства Минковского есть та разница, что в общих преобразованиях Лоренца в пространстве-времени исключается обращение времени — изменение знака координаты t. В уравнении распространения света, из которого мы исходили, стояло расстояние, пройденное светом от источника; оно положительно, и потому также $t>0$. Обращение знака времени исключено. Это соответствует тому, что структура пространства-времени — геометрия мира — определяется распространением света, а он распространяется от источников, а не сходится к поглотителям. Но в псевдоевклидовом пространстве знак координаты, соответствующей времени, ничем не связан. У самого Минковского это отличие отсутствовало и обычно не учитывается.

47.8. Дополнения

1. **Сложение скоростей.** Выводы теории относительности представляются парадоксальными. Но само постоянство скорости света парадоксально с обычной точки зрения. Если тело движется в направлении распространения света, то оно убегает от него и скорость света по отношению к нему должна быть, как пред-

ставляется, равной $c-v$, где v — скорость тела. Однако это не так.

Выведем закон сложения скоростей в теории относительности. Пусть тело движется в системе S вдоль оси x со скоростью u так, что $\Delta x = u\Delta t$. Из формул Лоренца (47.9)

$$\Delta\tilde{x} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Delta\tilde{t} = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (47.11)$$

Поэтому скорость тела относительно системы $\tilde{S}$ будет

$$\tilde{u} = \frac{\Delta\tilde{x}}{\Delta\tilde{t}} = \frac{(u-v)\Delta t}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)\Delta t} = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}},$$

а при другом направлении скорости v получим $\tilde{u} = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$.

При $u=c$ в обоих случаях $\tilde{u}=c$. И каковы бы ни были u, v, меньшие c, всегда и $\tilde{u}<c$.

2. **«Лоренцево сокращение».** Если $\Delta t=0$, то из формулы для Δx следует $\Delta x = \Delta\tilde{x}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Если в системе $\tilde{S}$ имеется покоящийся в ней стержень длиной l, то для его концов $\Delta\tilde{x}=l$, а Δx — расстояние между одновременными ($\Delta t=0$) положениями его концов относительно системы S. Из предыдущей формулы получаем:

$$\Delta x = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

т. е. расстояние между одновременными положениями его концов — покоящаяся длина стержня в системе S — меньше его длины в $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ раз.

Это называют «лоренцевым сокращением». Но стержень ничуть не сокращается, с ним вообще ничего не происходит. А Δx — это расстояние между положениями его концов относительно системы S.

Это можно сравнить с тем, что проекция отрезка короче отрезка. Но при проектировании отрезка с ним ничего не происходит, а длина проекции — это расстояние между его концами — как бы проектируется на ось проекции.

3. **«Замедление» процессов.** Пусть в некотором месте в системе $\tilde{S}$ происходит процесс, длящийся некоторое время $\Delta\tilde{t}$. Какой будет его длительность Δt в отношении системы S?

Так как процесс в $\tilde{S}$ протекает на одном месте, то $\Delta\tilde{x}=0$, и, стало быть, в системе S $\Delta x=v\Delta t$ (из первой формулы (47.11)). Поэтому из формулы для Δt

$$\Delta\tilde{t}=\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\Delta t-\frac{v^2}{c^2}\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\Delta t\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Таким образом, $\Delta t=\dfrac{\Delta\tilde{t}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Длительность Δt процесса относительно системы S оказывается больше.

47.9. Понятие об общей теории относительности

Включение в теорию относительности всемирного тяготения потребовало ее глубокого обобщения в виде так называемой общей теории относительности (в отличие от нее сама теория относительности в ее первоначальном виде называется специальной теорией относительности).

Переход к общей теории относительности аналогичен переходу от геометрии на плоскости к геометрии на любой искривленной поверхности. В этой теории пространство-время представляется имеющим «кривизну», которая и служит геометрическим представлением поля тяготения.

Мы делаем здесь только как бы намек на величественное развитие физики, отражающееся на развитии геометрии. Эти теории продолжают развиваться, особенно в исследовании строения Вселенной, можно сказать, головокружительно.

Поступаем в вуз

1. Около правильной шестиугольной пирамиды описана сфера радиуса 94. Ее центр находится в точке A внутри данной пирамиды. Около пирамиды с вершиной в точке A и тем же основанием, что и данная пирамида, описана сфера радиуса 49. Найдите тангенс угла между боковой гранью и основанием в данной пирамиде. Ответ. 5,4.

2. В плоскости P дан равнобедренный треугольник ABC, такой, что $AB=BC=b$, $AC=2a$. Шар радиуса r касается плоскости P в точке B. Две скрещивающиеся прямые проходят через точки A и C и касаются шара. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью P равен α. Найдите расстояние между этими прямыми. Ответ. $\dfrac{2a\operatorname{tg}\alpha\sqrt{2rb\sin\alpha-(r^2+b^2)\sin^2\alpha}}{\sqrt{b^2-a^2\cos^2\alpha}}$.

3. Основанием тетраэдра $ABCD$ является треугольник ABC, в котором $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle C=\dfrac{\pi}{6}$, $BC=2\sqrt{2}$. Длины ребер AD, BD, CD равны между собой. Сфера радиуса 1 касается ребер AD, BD, продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC. Найдите величину отрезка касательной, проведенной из точки к сфере. Ответ. $\sqrt{3}-1$.

4. Отрезок PO параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KAMB$, причем $KA=1$, $PO=3$. Все стороны прямоугольника $KAMB$ и отрезки KP, AP, BO, MO, PO касаются некоторого шара. Найдите радиус шара. Ответ. $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

5. Трехгранный угол образован тремя плоскостями α, β, γ. Две плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ, а между собой они образуют угол φ. Сфера S касается плоскости γ и пересекает плоскости α и β по окружностям радиуса r. Расстояние центра сферы от вершины трехгранного угла равно b. Определите радиус сферы R. Ответ. $\sqrt{\dfrac{b^2\sin^2 0{,}5\varphi+r^2}{1+\sin^2 0{,}5\varphi}}$.

6. Три одинаковых конуса, радиусы оснований которых равны r и составляют 0,75 их высоты, расположены по одну сторону от плоскости P, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Найдите радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости P, так и всех трех конусов. Ответ. $2r\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

7. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость пересекает ребра A_1B_1, B_1C_1 и BC соответственно в точках M, N, P. Найдите, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $B_1M:A_1B_1=1:2$, $B_1N:B_1C_1=2:3$ и $BP:CB=1:3$. Ответ. $7:29$.

8. В куб с ребром a вписана правильная шестиугольная призма так, что диагональ куба проходит через центры оснований призмы и на каждой грани куба лежат по две вершины призмы. Найдите объем призмы, если сторона ее основания в 3 раза меньше ребра куба. Ответ. $\frac{a^3(3-\sqrt{2})}{6}$.

9. Правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ описана около шара радиуса r. Точки M и N — середины боковых ребер BB' и CC' соответственно. В шар вписан прямой круговой цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN. Найдите объем этого цилиндра. Ответ. $\frac{9\pi}{5\sqrt{10}}r^3$.

10. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой $AB=BC=1$, $AC=\sqrt{3}$. В каком отношении объем вписанного в призму цилиндра делится плоскостью AB_1C? Ответ. $\sqrt{3}:2$.

11. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, равны соответственно 2, 4 и 6. Углы между ребрами, взятыми попарно, равны $\frac{\pi}{3}$. Найдите объем параллелепипеда. Ответ. $24\sqrt{2}$.

12. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной a. Вершина A проектируется в точку пересечения медиан треугольника ABC, и боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}a^2$.

13. Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a, а боковое ребро — длину $1{,}125\ a$. Точка E — середина ребра AB, а точка M лежит на отрезке EC и $EM=0{,}25\ EC$. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой MC_1. Найдите объем общей части этих призм. Ответ. $\frac{5\sqrt{3}}{48}a^3$.

14. Вершина A правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ совпадает с вершиной конуса, вершины B и C лежат на боковой поверхности этого конуса, а вершины B_1 и C_1 — на окружности его основания. Найдите отношение объемов конуса и призмы, если $AB_1:AB=5$. Ответ. $\frac{125}{18}\pi$.

15. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α, боковые ребра ее наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды. Ответ. $\frac{1}{24}c^3\sin 2\alpha \operatorname{tg}\varphi$.

16. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведена плоскость. Определите площадь сечения и объемы частей пирамиды, на которые она разделена сечением, зная сторону основания a и угол α, образованный плоскостью сечения с основанием. Ответ. Площадь сечения $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$, объем одной из частей $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{192}$.

17. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами на прямых AD и BC пересекает прямую EF и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка. Ответ. $\frac{\sqrt{23}}{6}a$.

18. В треугольной пирамиде $PABC$ все плоские углы трехгранных углов с вершинами в точках A и B равны α, $AB=a$. Определите объем пирамиды. Ответ. $\frac{a^3 \sin 0{,}5\alpha}{12\cos^2\alpha}\sqrt{\cos^2 0{,}5\alpha - \cos^2\alpha}$.

19. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а расстояние между боковым ребром и противолежащей стороной основания равно a. Найдите объем пирамиды. Ответ. $\frac{a^3}{3\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

20. Все четыре грани тетраэдра — равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна $\sqrt{3}$. Объем пирамиды равен $\frac{2}{3}$. Найдите длину оснований этих треугольников. Ответ. 2.

21. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно $\frac{2}{3}$. Вычислите площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1. Ответ. 3.

22. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Каждая из его вершин симметрично отражена относительно плоскости противоположной ей грани, в результате чего получены соответственно точки K, L, M, N. Найдите отношение объемов исходного и полученного тетраэдров. Ответ. 27 : 125.

23. В тетраэдре проведены отрезки, соединяющие его вершины с точками пересечения медиан противоположных граней. Все они пересекаются в точке O. Второй тетраэдр симметричен первому относительно точки O. Объем исходного тетраэдра равен V. Найдите объем общей части двух тетраэдров. Ответ. $0{,}5V$.

24. Шар радиуса R касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найдите объем пирамиды. Ответ. $\frac{R^3\sqrt{6}}{4}$.

25. Объем конуса равен V. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом между боковыми сторонами, равным α. Найдите объем пирамиды. Ответ. $\frac{2V}{\pi}\sin\alpha\cos^2\alpha$.

26. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка D — середина ребра A_1C_1. Правильная треугольная пирамида расположена так, что плоскость

ее основания совпадает с плоскостью ABC, одно боковое ребро проходит через вершину B, другое — через точку D, а третье ребро пересекает ребро CC_1. Найдите отношение объемов пирамиды и призмы. Ответ. $16:21$.

27. Сфера касается всех боковых ребер правильной четырехугольной призмы и ее оснований. Найдите отношение площади поверхности сферы, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы. Ответ. $\frac{\pi(5\sqrt{2}-6)}{7}$.

28. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед. Одна из сторон его основания равна b. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью, проходящей через данную сторону, угол β. Найдите боковую поверхность цилиндра. Ответ. $\frac{1}{4}\pi b^2 \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

29. В цилиндр вписана правильная треугольная пирамида так, что одно из ее боковых ребер есть образующая поверхности цилиндра. Найдите объем пирамиды по радиусу R основания цилиндра и по величине двугранного угла α при боковом ребре пирамиды. Ответ. $\frac{R^3 \sin^4 \alpha}{3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}}$.

30. Ребро основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ равно 8. Точки K и L расположены на ребрах AB и AC соответственно, причем $AK=7$, $AL=4$. Известно, что для данной пирамиды существует единственный конус, вершина которого совпадает с точкой K, центр основания лежит на прямой SC, а отрезок KL является одной из образующих. Найдите объем конуса. Ответ. $10\sqrt{3}\pi$.

31. Даны правильный тетраэдр и шар, площади поверхностей которых относятся как $s:1$. Можно ли шар поместить в тетраэдр, если: а) $s=2\sqrt{3}$; б) $s=3$? Ответ. а) Да; б) нет.

32. Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отрезки $SK=\frac{2}{3}SA$, $SL=\frac{1}{2}SB$, $SM=\frac{1}{3}SC$ соответственно. Длина бокового ребра пирамиды равна a. Найдите длину отрезка SN, отсекаемого этой плоскостью на ребре SD. Ответ. $0{,}4a$.

33. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен утроенному двугранному углу при ее основании. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H. Ответ. $\frac{12}{7}H^3$.

34. Основанием пирамиды служит равнобокая трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания пирамиды один и тот же угол, равный β. Найдите объем пирамиды. Ответ. $\frac{1}{6}S\operatorname{tg}\beta\sqrt{S\sin\alpha}$.

35. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна H, все пять ее граней равновелики. Найдите площадь полной поверхности пирамиды. Ответ. $\frac{4}{3}H^2$.

36. Боковые грани четырехугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а в основании пирамиды лежит ромб, одна диагональ которого в два раза длиннее другой. Найдите объем пирамиды, если известно, что площадь боковой поверхности равна 6, а среди боковых ребер есть два ребра, составляющих тупой угол. Ответ. $\frac{4}{3}$.

37. Квадрат $ABCD$, сторона которого равна 1, служит основанием пирамиды с вершиной в точке S. Двугранные углы, образуемые гранями ASB, BSC, CSD и DSA с основанием, относятся как числа 1, 2, 7, 2. Найдите боковую поверхность пирамиды. Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

38. Основанием пирамиды служит квадрат, две боковые грани пирамиды перпендикулярны к ее основанию, две другие образуют с основанием угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, а четыре другие — на основании пирамиды. Зная, что боковое ребро куба равно a, найдите боковую поверхность пирамиды. Ответ. $\frac{(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}a^2$.

39. Куб с ребром a расположен в правильной четырехугольной пирамиде так, что четыре его вершины лежат на боковых ребрах, а четыре другие — на основании пирамиды. Боковая грань пирамиды образует с основанием угол α. Найдите объем пирамиды. Ответ. $\frac{16\sqrt{2}a^3\cos^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{3\sin 2\alpha\sin\alpha}$.

40. В пирамиду, основанием которой служит ромб с острым углом α, вписан шар радиуса R. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды. Ответ. $\frac{4}{3}R^3\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{3}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}$.

41. В шар радиуса R вписана четырехугольная пирамида, все боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом α. В основании пирамиды лежит прямоугольник с углом β между диагоналями. Найдите объем пирамиды. Ответ. $\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\alpha\operatorname{tg}\alpha\sin\beta$.

42. Длина образующей конуса равна l, угол образующей с плоскостью основания равен α. Найдите объем описанной около конуса пирамиды, основанием которой служит ромб с острым углом β. Ответ. $\frac{2l^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3\sin\beta}$.

43. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (S — вершина) точки K и L выбраны на ребрах ES и AF соответственно так, что $EK=0{,}2\,ES$,

$FL=0{,}5\,FA$. Точки R и T расположены на прямых DK и SL так, что прямая RT перпендикулярна плоскости SAD. Высота пирамиды равна 18, $RT=4$. Найдите объем пирамиды. Ответ. $75\sqrt{3}$.

44. В правильную треугольную усеченную пирамиду с двугранным углом α при основании вписан усеченный конус. Определите боковую поверхность конуса, если апофема боковой грани пирамиды равна сумме радиусов оснований конуса, а радиус меньшего основания конуса равен r. Ответ. $\dfrac{\pi r^2}{\sin^4 0{,}5\alpha}$.

45. Многогранник имеет шесть граней: $ABCK$, $EMPH$, $ABME$, $BCPM$, $CKHP$, $AKHE$. Все его вершины лежат на сфере радиуса $\sqrt{34}$. Грани $ABCK$ и $EMPH$ лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми 2. Известно, что $AB:CK=EM:PH\neq 1$, площадь грани $EMPH$ равна 5, а объем многогранника равен $\dfrac{98}{15}$. Найдите длину ребра BM. Ответ. $\sqrt{8}$.

46. В основание прямого кругового конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен α. Определите объем конуса. Ответ. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

47. В прямой круговой конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен r. Прямая, соединяющая центр шара с произвольной точкой окружности основания конуса, составляет с высотой конуса острый угол α. Найдите объем конуса. Ответ. $\dfrac{\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha}{24\cos^6\alpha}$.

48. Поверхность шара, вписанного в конус, боковая поверхность конуса и полная поверхность конуса образуют геометрическую прогрессию. Найдите объем конуса, если радиус вписанного в него шара равен R. Ответ. $3\pi R^3$.

49. В усеченный конус вписан полушар, объем которого составляет $\dfrac{6}{7}$ объема усеченного конуса. Найдите отношение боковой поверхности конуса к сферической поверхности полушара. Ответ. 1 или $\dfrac{20}{21}$.

50. В конус вписаны два касающихся друг друга шара радиусов r и R. Найдите площадь части поверхности конуса, заключенной между линиями касания конуса с шарами. Ответ. $4\pi Rr$.

51. Дан правильный тетраэдр объема V. Второй тетраэдр получается из данного поворотом его на угол α ($\alpha\leqslant 0{,}5\pi$) вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер тетраэдра. Найдите объем общей части этих двух тетраэдров. Ответ. $V\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 0{,}5\alpha}{(1+\operatorname{tg}0{,}5\alpha)^2}$.

52. Куб с ребром a повернули на 90° вокруг прямой, соединяющей середины двух параллельных и не лежащих в одной грани ребер. Найдите объем общей части исходного куба и повернутого. Ответ. $\frac{a^3}{3}(3\sqrt{2}-2)$.

53. Тупоугольный равнобедренный треугольник вращается вокруг оси, проходящей через точку пересечения его высот параллельно большей стороне. Определите объем тела вращения, если тупой угол равен α, а противоположная сторона равна a. Ответ. $\frac{\pi a^3}{12\sin^2 0{,}5\alpha}\left(3-4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

54. Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг внешней оси, параллельной стороне треугольника и отстоящей от нее на расстоянии, равном половине высоты треугольника. Найдите объем тела вращения. Ответ. $\frac{5\pi a^3}{8}$.

55. Площадь прямоугольной трапеции $ABCD$ равна S, длина высоты AB равна h, величина острого угла ADC трапеции равна α. На боковой стороне CD взята точка E так, что $CE=ED$. Найдите объем тела, полученного вращением четырехугольника $ABED$ вокруг прямой AB. Ответ. $\frac{\pi}{24h}(16S^2+h^4\operatorname{ctg}^2\alpha+6Sh^2\operatorname{ctg}\alpha)$.

56. На окружности полукруга радиуса R даны точки A и B. Если N — один из концов диаметра, а O — центр окружности, то $\angle AON=\alpha$, $\angle BON=\beta$ $\left(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$. Определите площадь полной поверхности тела, образованного вращением кругового сектора AOB вокруг диаметра. Ответ. $2\pi R^2\sin 0{,}5(\alpha+\beta)(2\sin 0{,}5(\alpha-\beta)+\cos 0{,}5(\alpha-\beta))$.

57. Часть квадрата $ABCD$, оставшаяся после того, как из него вырезали четверть окружности с центром в вершине D и радиусами, равными стороне квадрата, вращается вокруг оси, проходящей через D параллельно диагонали AC. Найдите объем полученного тела вращения, если сторона квадрата равна a. Ответ. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{6}\right)$.

58. Из конца диаметра шара проведена хорда так, что поверхность, образуемая вращением ее вокруг этого диаметра, делит объем шара на две равновеликие части. Определите угол между хордой и диаметром. Ответ. $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

59. Правильная пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной a, вращается вокруг прямой, проходящей через ее вершину. Эта прямая параллельна одной из сторон квадрата, лежащего в основании пирамиды. Вычислите объем тела вращения, если плоский угол при вершине пирамиды равен α. Ответ. $\frac{\pi a^3}{12}\left(1+2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

Предметный указатель

Антипризма 63
Апофема правильной пирамиды 32
Архимедовы тела 64
Аффинные преобразования 254

Базис 152
Боковая грань пирамиды 29
— — призмы 20
— поверхность пирамиды 29
Боковое ребро пирамиды 29
— — призмы 20

Вектор (векторная величина) 139
Векторное умножение векторов 169
Векторы коллинеарные (параллельные) 140
— компланарные 141
— противоположно направленные 140
— равные 140
— сонаправленные 139
Вершина многогранника 11
Винтовая линия 245
Винтовое движение 238
Внутренняя геометрия поверхности 106
Выпуклая оболочка множества 38
Высота пирамиды 29
— призмы 21

Грань многогранника 10
Группа преобразований множества 277
— симметрии фигуры 250

Движение 204
Двугранный угол при ребре многогранника 11
Двуугольник 125
Додекаэдр 56

Зеркальный поворот 60, 241

Избыток треугольника 126

Изгибание поверхности 107
Изометричные поверхности 107
Икосаэдр 56
Инварианты группы 277

Касательная прямая 107
Композиция отображений 203
Координатная сеть 190
Координаты косоугольные (аффинные) 188
— полярные 189
— прямоугольные 176
— сферические 189
— цилиндрические 189
Кратчайшая 106
Кривизна многогранного угла 128

Метрическое пространство 284
Многогранник 9
— выпуклый 36
— полуправильный равногранный 64
— — равноугольный 63
— правильный 54
Многогранный угол 62
— — выпуклый 62
— — правильный 62
Многоугольник 10, 12
— простой 10

Неподвижная точка отображения 204

Образ фигуры 203
Объем конуса (пирамиды) 88
— простой фигуры 75
— прямого цилиндра 78
— тела вращения 89
— цилиндра (призмы) 87
— шара 88
Октаэдр 56
Определение дескриптивное (описательное) 14

— конструктивное 14
Основание пирамиды 29
— призмы 20
Отображение 202
— взаимно однозначное 203
— обратимое 203
— тождественное 204
Отображения взаимно обратные 204
Отражение в плоскости (зеркальная симметрия) 216

Параллелепипед 21
— прямоугольный 21
Параллельный перенос 212
Пирамида 27, 28
— n-угольная 29
— правильная 30
Площадь боковой поверхности конуса 113
— — — усеченного конуса 114
— — — цилиндра 113
— поверхности 109
— простой фигуры 75
— сферического треугольника 126
— сферы 111
Поверхность 103
— двусторонняя (ориентируемая) 106
— односторонняя (неориентируемая) 105
Поворот вокруг прямой 24, 218
Призма 20
— наклонная 21
— n-угольная 21
— правильная 21
— прямая 21
Принцип двойственности 271
Проективная плоскость 259
Проективное преобразование 264
Простая фигура 74
Простое отношение трех точек 258
Равенство фигур 205
Равновеликость 91
Равносоставленность 91
Радиус-вектор 154
Развертка 49
Род движения 234

Сдвиг вдоль оси 256
Сжатие к оси 256
Симметрия осевая в пространстве 221
— поворотная 24
— центральная 214
Скалярное умножение векторов 143
Сложение векторов 141
Сложное отношение четырех точек 266
Составляющие вектора 148
Стерадиан 112
Сферический пояс 117
— сегмент 117
— треугольник 125

Триангуляция многогранника 12
— многоугольника 11

Умножение вектора на число 143
Усеченная пирамида 29
— — правильная 30

Центр масс 160

Шаровой пояс 95
— сегмент 94
— сектор 94

Учебное издание

Александров Александр Данилович
Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич

ГЕОМЕТРИЯ

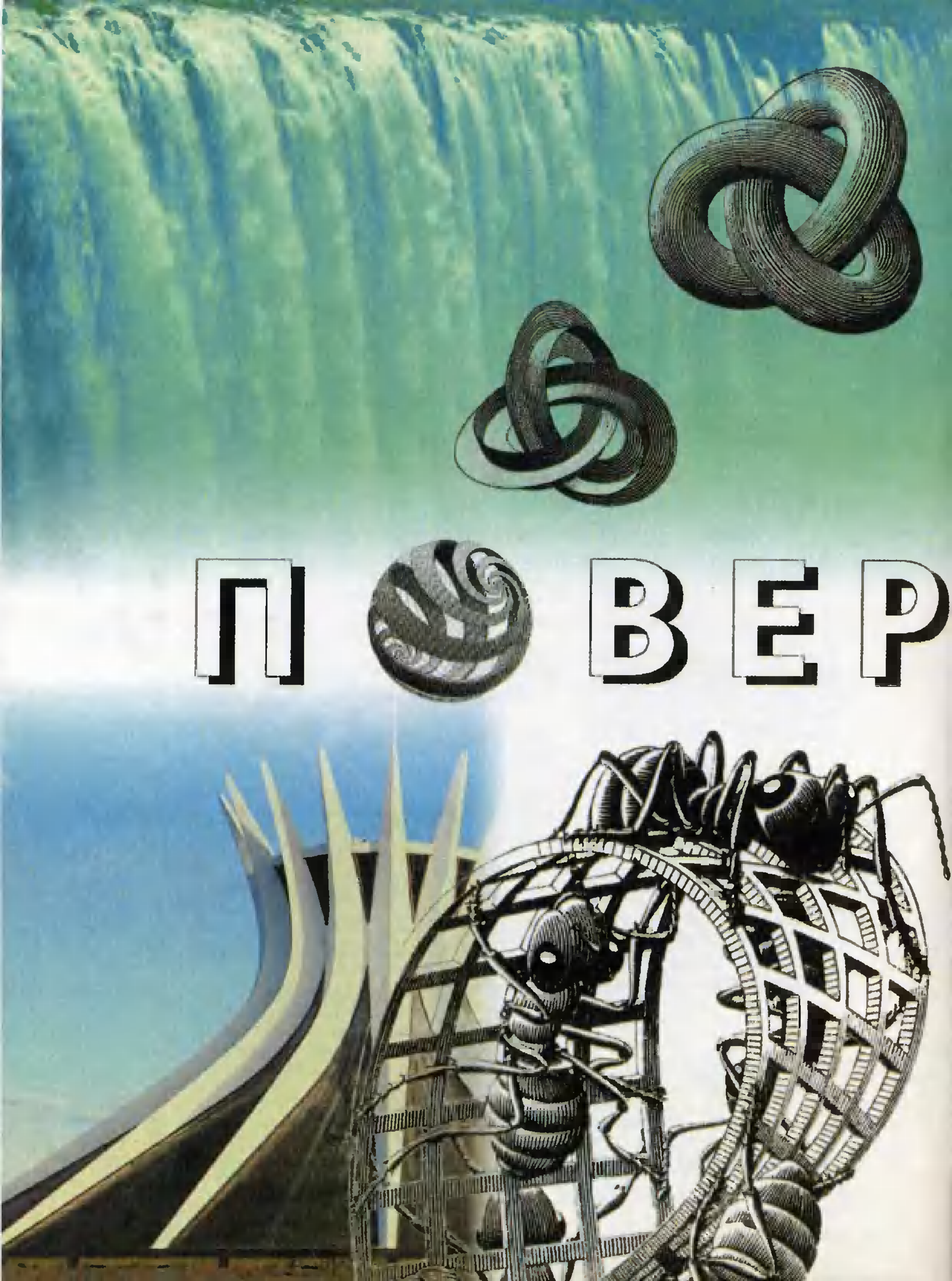
Учебник для 11 класса
с углубленным изучением математики

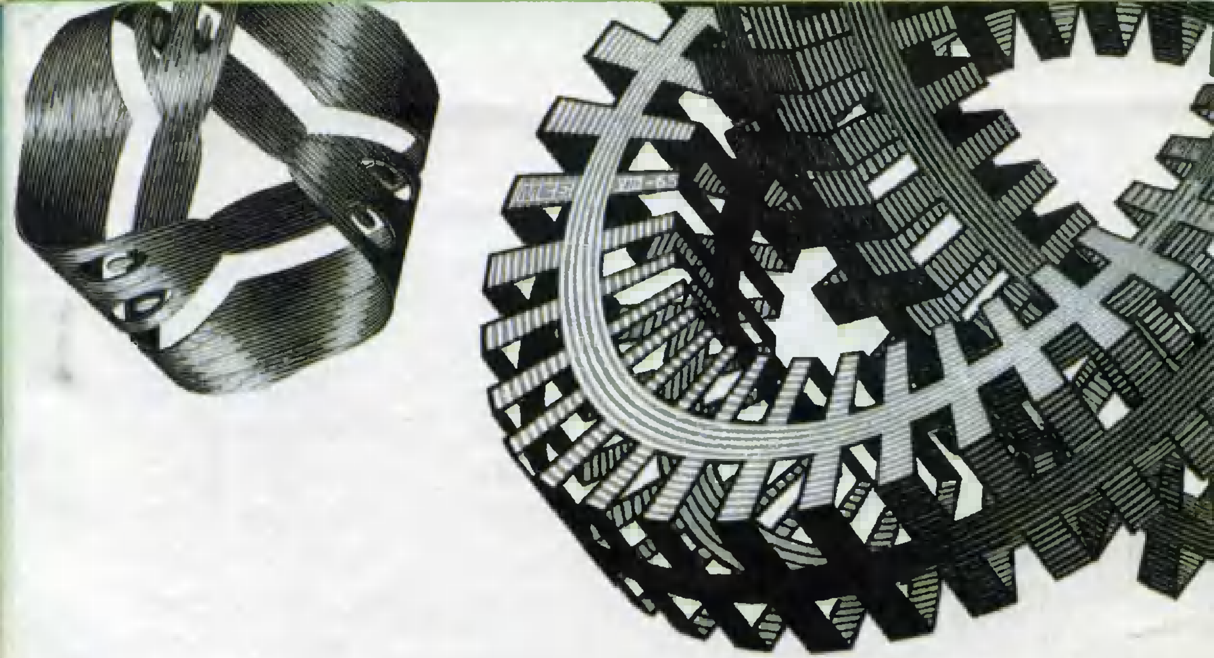
Зав. редакцией ***Т. А. Бурмистрова***
Редактор ***Н. Б. Грызлова***
Младший редактор ***Н. В. Сидельковская***
Художники ***Е. А. Стребкова, О. М. Шмелев***
Художественный редактор ***Е. Р. Дашук***
Технические редакторы ***Е. Н. Зелянина,***
Р. С. Еникеева, Н. А. Киселева
Корректор ***О. Н. Леонова***

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.96. Сдано в набор 20.10.99. Подписано к печати 20.06.2000. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,4+0,44 форз. Усл. кр.-отт. 48,7. Уч.-изд. л. 19,29+0,66 форз. Тираж 10 000 экз. Заказ № 9638.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Издательство «Просвещение» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Государственное унитарное предприятие Смоленский полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.


П ВЕР



ХНОСТИ

Учебно-методический комплект для углубленного изучения геометрии в 10-11 классах включает:

А.Д.Александров, А.Л.Вернер, В.И.Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ 10
ГЕОМЕТРИЯ 11
учебники

В.И.Рыжик

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ
для 10 класса
для 11 класса

В.М.Паповский, Н.М.Пульцин

УГЛУБЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ
в 10 классе
в 11 классе

Методические рекомендации для учителя

ISBN 5-09-009475-6

9 785090 094757

·Просвещение·

ГЕОМЕТРИЯ

11